

Capitolo 7

LO STATO LIMITE DI INSTABILITA'

7.1 Lo stato limite di instabilità

La instabilità dell'equilibrio riguarda le membrature compresse snelle, per le quali assumono rilevanza le sollecitazioni aggiuntive associate agli spostamenti trasversali dell'elemento, ovvero gli effetti del II ordine.

Nelle membrature in c.a., caratterizzate di regola da dimensioni delle sezioni trasversali non trascurabili rispetto alla loro lunghezza, il problema della instabilità dell'equilibrio è meno importante rispetto a quanto si rileva nelle strutture in acciaio, generalmente più snelle. Esistono però varie tipologie strutturali in calcestruzzo nelle quali la snellezza raggiunge valori elevati e la verifica deve essere effettuata tenendo conto degli effetti del II ordine. Questa situazione si verifica ad esempio nei casi seguenti:

- pile di ponti e viadotti;
- colonne di capannoni prefabbricati;
- costruzioni prefabbricate a grandi pannelli;
- telai caratterizzati da notevoli deformabilità, spesso determinata dalla presenza di connessioni interne parziali.

Su di un piano più generale va considerato inoltre che la crescente utilizzazione di calcestruzzi ad alta resistenza, portando a sezioni rette di dimensioni più contenute, rende più importante l'entità delle sollecitazioni del II ordine ed i conseguenti problemi di instabilità dell'equilibrio.

7.2 La stabilità dell'equilibrio elastico

Con riferimento alla membratura di Fig. 7.1 (trave di Eulero) ed ipotizzando un comportamento lineare indefinito del materiale con un carico assiale centrato, il valore dello sforzo normale per il quale si verifica la biforcazione dell'equilibrio, ovvero per il quale accanto alla situazione rettilinea indeformata l'asta ammette configurazioni inflesse di ampiezza indefinita (instabilità), è definito dalla relazione di Eulero:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_0^2} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} \quad (7.1)$$

dove N_{cr} è detto *carico critico euleriano*. In tale relazione la quantità

$$\lambda = \frac{L_0}{i} = \frac{\beta L}{i} \quad (7.2)$$

si definisce *snellezza dell'asta*, con L_0 la lunghezza libera di inflessione (distanza tra due punti di flesso successivi della deformata flessionale) ed i il raggio di inerzia della sezione retta nel piano di inflessione ($i = \sqrt{I/A}$). Il carico critico euleriano N_{cr} diminuisce proporzionalmente al quadrato della snellezza λ , per cui appare evidente che al crescere della snellezza degli elementi cresce rapidamente il pericolo dell'instabilità.

In presenza di flessione lungo l'asse dell'elemento determinata da carichi laterali o eccentricità del carico assiale, la deformata flessionale compare per valori delle azioni esterne di qualunque entità, ma il carico critico euleriano rappresenta ugualmente il valore del carico assiale per il quale gli spostamenti diventano incontrollabili raggiungendo la situazione limite di perdita di equilibrio per instabilità.

Prima però di raggiungere il carico critico, per valori del carico assiale significativi (generalmente si assume $N/N_{cr} > 0.1$, come vedremo in seguito), si è in presenza di *non linearità geometrica*, e pertanto l'usuale analisi del I ordine non è sufficiente a definire compiutamente lo stato di sollecitazione delle sezioni, ma occorre considerare anche le sollecitazioni del II ordine; si tratta di valutare l'equilibrio con riferimento alla configurazione deformata delle membrature e delle strutture, considerando le sollecitazioni aggiuntive prodotte dal carico assiale per gli spostamenti trasversali. In tal modo la crisi dell'elemento può verificarsi, a causa del raggiungimento delle condizioni ultime nella sezione più sollecitata, anche per valori delle azioni esterne considerevolmente inferiori a quelle corrispondenti alla condizione di collasso in presenza di soli effetti del I ordine.

E' importante ricordare che dalla risoluzione dell'equazione differenziale di equilibrio dell'asta di Eulero⁽¹⁾, sollecitata con una certa distribuzione di momenti del I ordine M_I , si ricava che il momento totale comprensivo delle sollecitazioni del II ordine può esprimersi mediante la relazione:

$$M = \frac{M_I}{1 - N / N_{cr}} = \psi \cdot M_I \quad (7.3)$$

⁽¹⁾ Tale relazione si ottiene eseguendo uno sviluppo in serie di Fourier della funzione spostamento e della funzione momento ed arrendandosi al primo termine (Cfr Vol. Ia, par.6.4)

essendo $\psi=1/(1 - 1/\alpha_{cr})$ il fattore di amplificazione che tiene conto degli effetti del II ordine.

Questa relazione, dedotta in realtà per un comportamento elastico-lineare del materiale, può essere estesa al campo non lineare con opportune correzioni e risulta in ogni caso molto utile in quanto fornisce l'amplificazione delle sollecitazioni provocate dalla non linearità geometrica in funzione del parametro caratteristico rappresentato dal rapporto α_{cr} tra il carico critico euleriano N_{cr} ed il carico normale N della membratura.

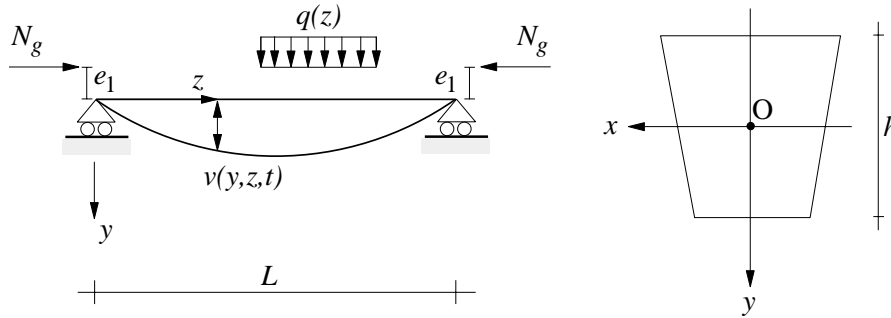


Fig. 7.1: Trave elastica con carico assiale

7.3 La stabilità di colonne snelle in calcestruzzo armato

Per valutare il comportamento deformativo delle membrature in calcestruzzo armato, occorre considerare anche la non linearità di tipo meccanico. Infatti le sezioni, a causa dei legami costitutivi non lineari dei materiali e comunque caratterizzati da una resistenza finita, hanno una capacità di resistenza limitata, espressa ad esempio mediante i domini di interazione (N_u, M_u) allo stato limite ultimo: pertanto la crisi in presenza di effetti del II ordine sopraggiunge in genere per livelli di carico ben inferiori al carico critico euleriano a causa dell'esaurimento delle capacità di resistenza delle sezioni.

Il comportamento di elementi snelli in c.a. al variare della snellezza degli elementi è rappresentato nella Fig. 7.2, in cui è riportato un dominio di interazione (N_u, M_u) e le curve di evoluzione delle sollecitazioni nella sezione critica di una colonna soggetta a carico normale con assegnata eccentricità e_1 del I ordine, considerata costante lungo l'asse:

- a) se gli spostamenti trasversali sono trascurabili ($N \ll N_{cr}$ fino al collasso), il momento vale $M = N \cdot e_1$ e la legge di evoluzione $N - M$ al crescere di N è lineare: la crisi della colonna si verifica quando la retta 1 interseca il dominio di resistenza; in tal caso la colonna si comporta come colonna tozza e gli effetti del II ordine sono trascurabili;
- b) se invece la colonna è snella, gli spostamenti trasversali diventano importanti e la legge

di evoluzione dei momenti è $M = N \cdot (e_1 + v)$; tale legame è in realtà non lineare in quanto gli spostamenti laterali v della colonna aumentano, per di più in modo più che lineare, al crescere del carico assiale, a causa delle non linearità geometrica e meccanica; la crisi sopraggiunge quando la curva 2 interseca il dominio di interazione, per esaurimento della resistenza dell'elemento; questo comportamento è quello più frequente nelle strutture snelle in c.a.;

- c) se infine l'elemento è particolarmente snello, allora raggiunge la crisi per perdita dell'equilibrio prima che si abbia l'esaurimento delle capacità di resistenza (N raggiunge N_{cr} prima del collasso): questo tipo di instabilità può aversi in membrature molto snelle, in realtà poco frequenti nelle costruzioni civili (caso 3).

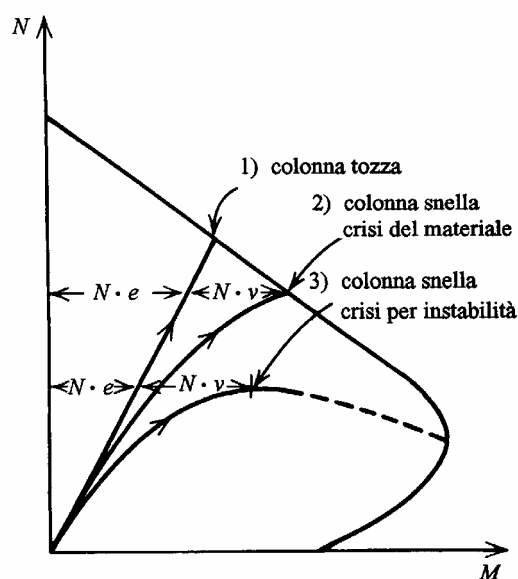


Fig. 7.2: Curve di evoluzione delle sollecitazioni per elementi snelli

Il comportamento delle strutture in c.a. sensibili agli effetti del II ordine dipende da vari fattori, che possono essere riassunti così come descritto nel seguito.

- 1) Il grado di vincolo agli spostamenti laterali dell'intera struttura, in base al quale le strutture si dividono in strutture a nodi fissi (Fig. 7.3a) ed a nodi mobili (Fig. 7.3b).

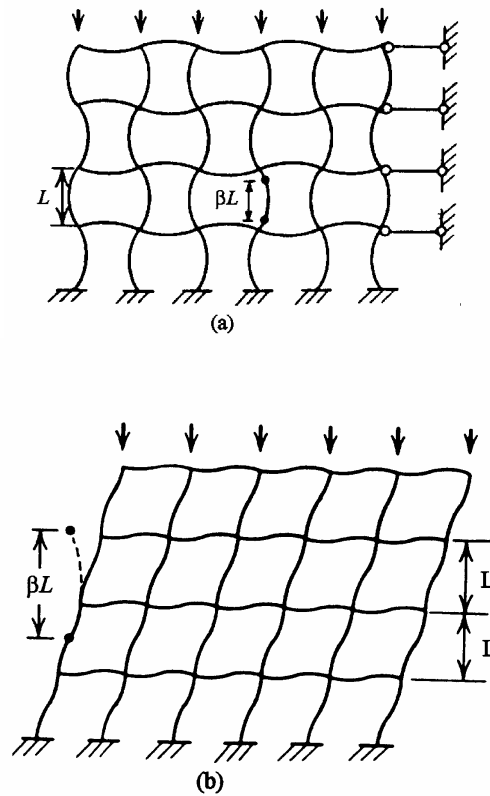


Fig. 7.3: Telaio a nodi fissi (a) e mobili (b)

- 2) La snellezza degli elementi, che può essere espressa dalla snellezza geometrica L_0/h , essendo $L_0 = \beta \cdot L$ la lunghezza libera di inflessione ed h la dimensione della sezione nel piano di inflessione, o dal rapporto di snellezza (detta anche più semplicemente snellezza) pari a $\lambda = L_0/i$; la lunghezza libera di inflessione a sua volta dipende dalle condizioni di vincolo agli estremi della colonna e dal grado di vincolo laterale dell'intera struttura, a nodi fissi (Fig. 7.4) o a nodi mobili (Fig. 7.5).

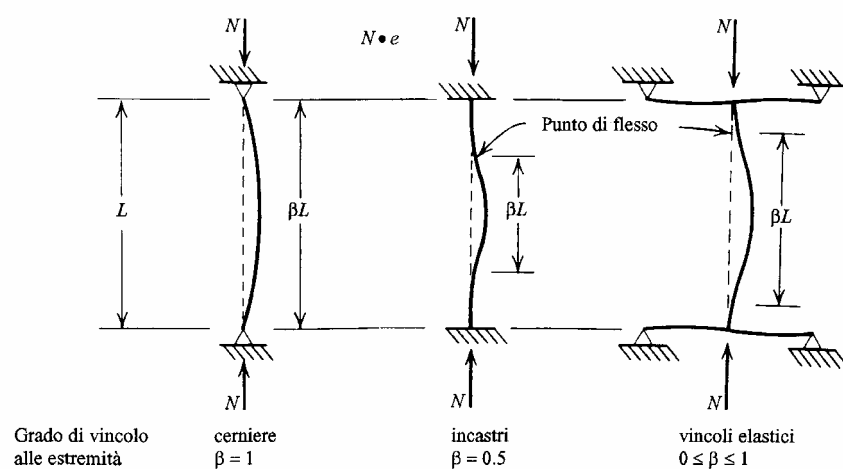


Fig. 7.4: Lunghezze libere di inflessione di aste in telai a nodi fissi

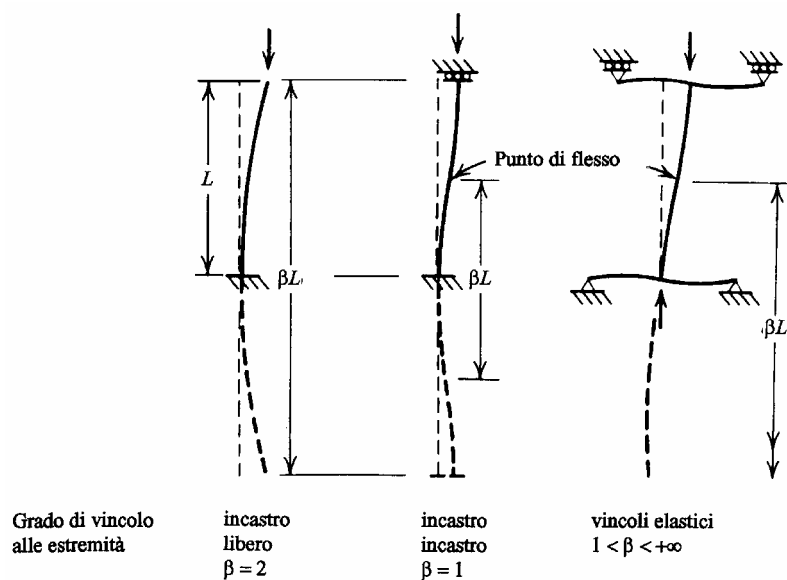
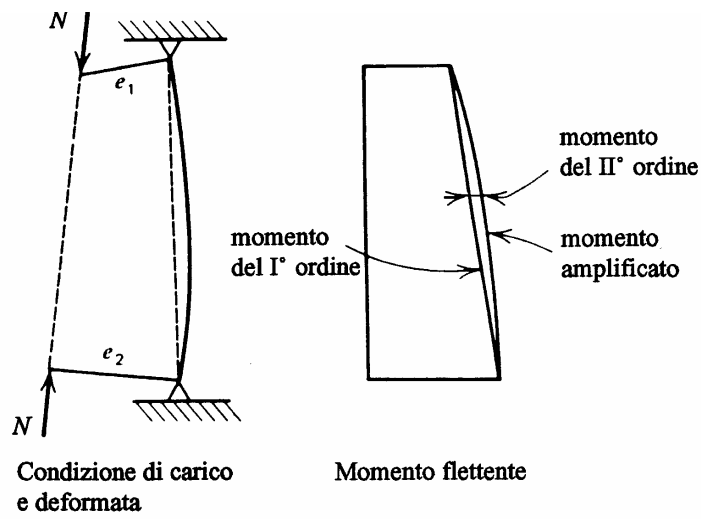
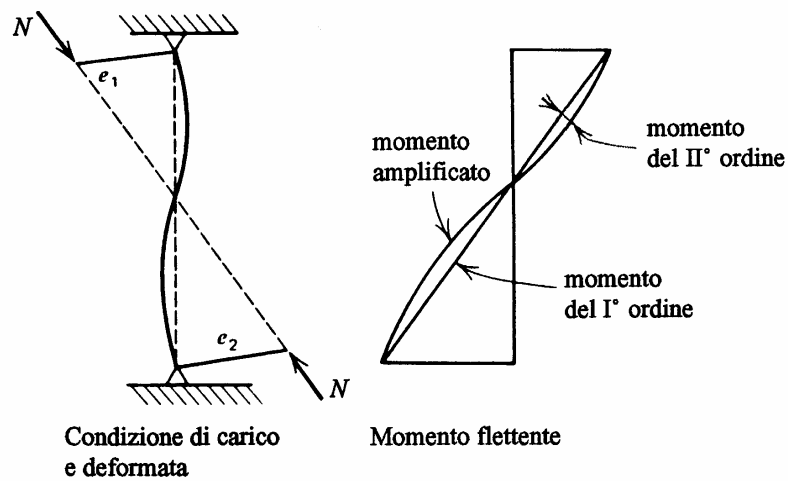


Fig. 7.5: Lunghezze libere di inflessione di aste in telai a nodi spostabili

- 3) L'eccentricità del I ordine e/h del carico negli estremi e la sua distribuzione lungo l'asse dell'elemento (Fig. 7.6).



(a)



(b)

Fig. 7.6: *Eccentricità di uguale segno(a) o contrapposte (b)*

- 4) Il comportamento meccanico dei materiali, da cui dipende la resistenza delle sezioni rette e la rigidezza flessionale degli elementi, sintetizzato dal diagramma momento-

curvatura ($M, 1/r$) a sforzo normale costante (Fig. 7.7).

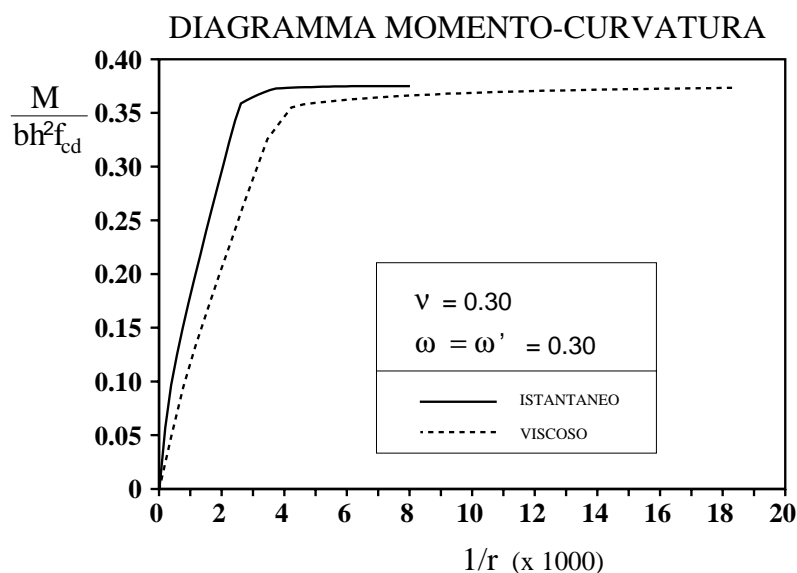


Fig. 7.7: Diagramma momento-curvatura a sforzo normale costante

- 5) La presenza di carichi permanenti capaci di produrre effetti viscosi (carichi di lunga durata) che, a causa della viscosità del calcestruzzo, provoca incrementi degli spostamenti laterali del I ordine e conseguentemente degli effetti del II ordine.

La viscosità del calcestruzzo rappresenta, come è noto, la caratteristica del materiale di incrementare nel tempo le deformazioni iniziali in presenza di tensioni costanti o variabili nel tempo. Un tale comportamento può essere visualizzato a livello di legame costitutivo come nella Fig. 7.8, dove sono riportati il legame costitutivo σ - ε non lineare istantaneo del calcestruzzo e quello teorico in presenza di effetti viscosi con tensione costante nel tempo; quest'ultimo rappresenta la deformazione raggiunta nel calcestruzzo a tempo infinito se la tensione corrispondente si mantiene costante nel tempo. Una trattazione semplificata del fenomeno, consiste nel valutare le deformazioni al tempo t in funzione di quelle al tempo iniziale di caricamento t_0 mediante la relazione lineare:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c(t_0) \cdot (1 + \varphi) \quad (7.4)$$

in cui il coefficiente di viscosità φ , che rappresenta la capacità viscosa del materiale, è pari al rapporto tra deformazione viscosa e deformazione elastica. Esso è funzione delle caratteristiche del materiale, del grado di maturazione del calcestruzzo all'atto

dell'applicazione dei carichi permanenti, delle condizioni termo-igrometriche dell'ambiente esterno, della geometria dell'elemento strutturale. I valori usuali di ϕ sono compresi nell'intervallo (2, 3), ma sono possibili valori superiori; l'Eurocodice fornisce relazioni dettagliate per la valutazione di ϕ in funzione dei vari parametri influenti (cfr. Vol. Ia, par.2.6).

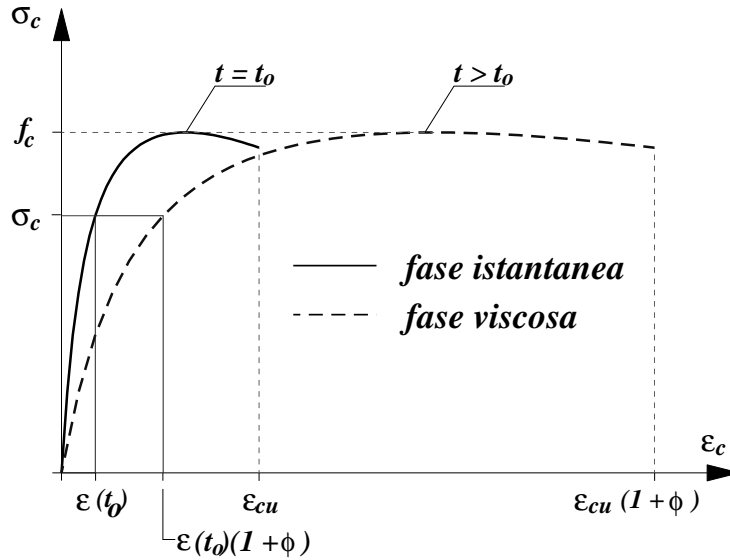
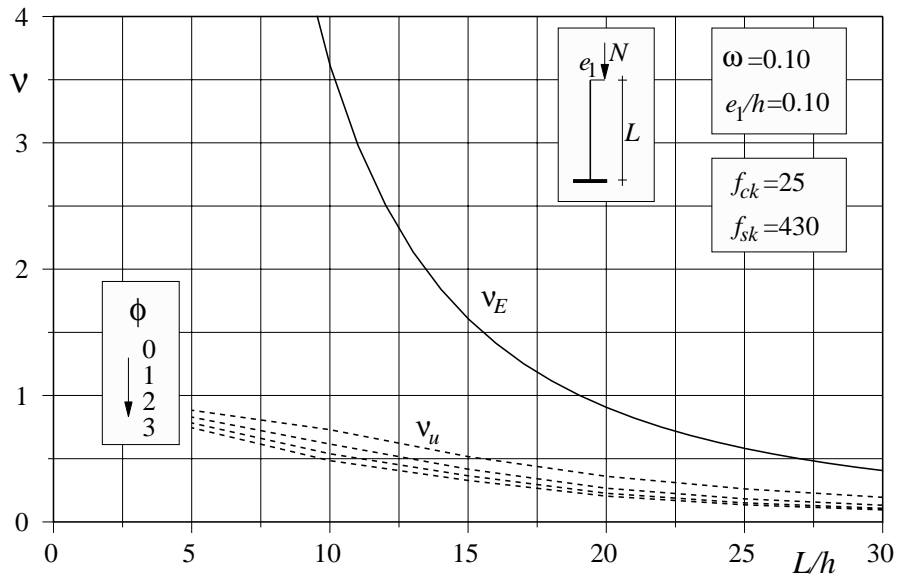
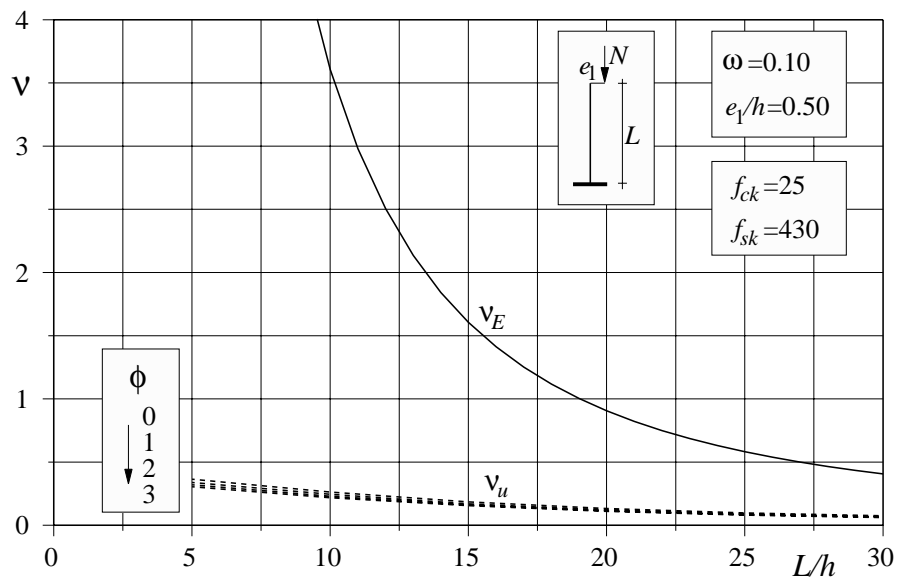


Fig. 7.8: Legame σ - ϵ non lineare, istantaneo e viscoso

Dal punto di vista strutturale, nei problemi di instabilità di membrature in c.a., la viscosità del calcestruzzo è responsabile di una maggiore deformabilità degli elementi e quindi della struttura, determinando incrementi degli spostamenti del I ordine, e quindi delle sollecitazioni del II ordine, che possono essere molto significativi.

Nelle Fig. 7.9 ÷ Fig. 7.12 sono riportati, per colonne singole incastrate al piede e libere in sommità, le curve rappresentative del carico critico euleriano N_{cr} e del carico ultimo N_u adimensionali ($v_u = N_u/b \cdot h \cdot f'_{cd}$) al variare della snellezza geometrica L/h e per alcuni valori dei parametri rilevanti: eccentricità del carico e/h , percentuale meccanica di armatura ω , coefficiente di viscosità ϕ . Si può osservare come i valori del carico ultimo siano sempre inferiori al carico critico euleriano a causa, come detto, dei legami costitutivi non lineari e limitati dei materiali rispetto al comportamento elastico indefinito ipotizzato nell'asta di Eulero. Inoltre l'influenza della viscosità è fortemente ridotta in presenza di forte eccentricità del I ordine variabile nell'intervallo $e/h = 0.10 \div 0.50$ mentre gli effetti del II ordine si riducono in presenza di forti armature assunte variabili nell'intervallo $\omega = 0.10 \div 0.50$.

Fig. 7.9: Carico critico ed ultimo per $\omega=0.10$ ed $e_1/h=0.10$ Fig. 7.10: Carico critico ed ultimo per $\omega=0.10$ ed $e_1/h=0.50$

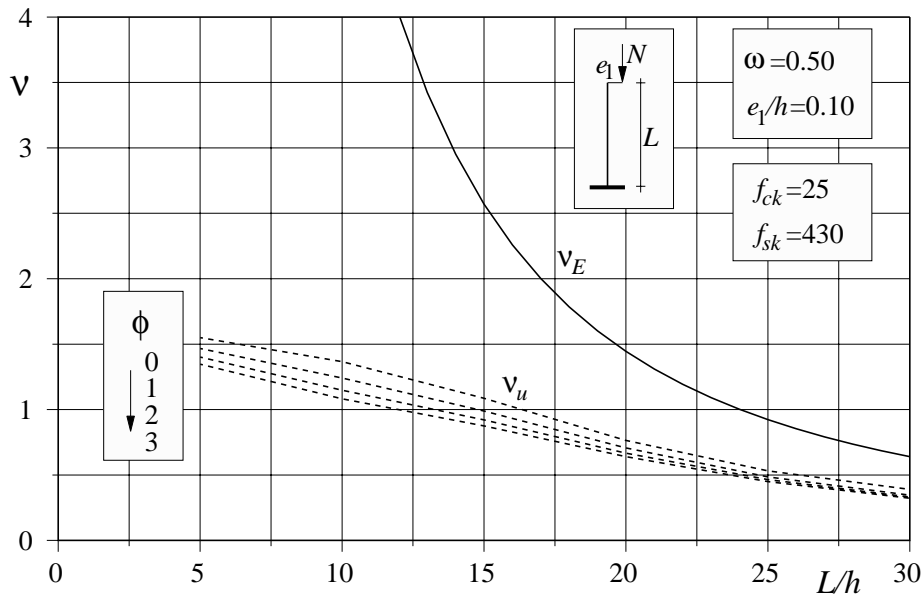


Fig. 7.11: Carico critico ed ultimo per $\omega=0.50$ ed $e_1/h=0.10$

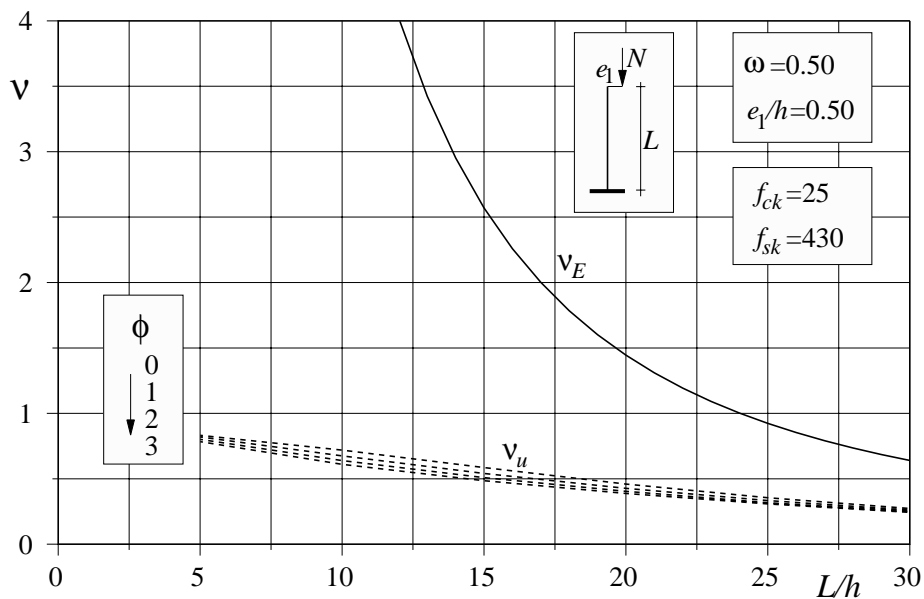


Fig. 7.12: Carico critico ed ultimo per $\omega=0.50$ ed $e_1/h=0.50$

7.4 Classificazione delle strutture sensibili agli effetti del II ordine

In molte normative, ai fini della verifica di stabilità, le strutture vengono suddivise in controventate o non controventate a seconda della presenza o meno di elementi di controvento. Tuttavia tale classificazione può non essere significativa in presenza di controventi particolarmente deformabili in quanto in tal caso gli effetti del II ordine possono essere comunque rilevanti.

Più significativa, ai fini della verifica strutturale, appare la suddivisione in strutture a nodi fissi o a nodi mobili. Tale classificazione, più che fare riferimento a caratteristiche tipologiche dello schema strutturale, si riferisce direttamente alla sensibilità della struttura agli effetti del II ordine indotti dagli spostamenti nodali.

I metodi di verifica delle strutture snelle sono pertanto basati su di una preliminare valutazione della sensibilità agli effetti del secondo ordine in base alla quale si individuano generalmente tre casi:

- a) strutture poco sensibili agli effetti del II ordine;
- b) strutture sensibili agli effetti del II ordine;
- c) strutture con elevati effetti del II ordine.

Tale valutazione preliminare si esegue in maniera apparentemente diversa per le aste singole, ovvero prive di collegamenti elastici con le rimanenti parti della struttura, e per le strutture nel loro complesso. Nel primo caso, ovvero per le aste singole, il criterio generale sopra descritto viene tradotto in limiti sulle snellezze. Procedure specifiche sono previste invece per le strutture intelaiate a maglie rettangolari, che costituiscono una delle tipologie più diffuse nella pratica costruttiva; per esse si propongono frequentemente metodi semplificati per la valutazione della appartenenza della struttura ad una delle classi sopra citate.

Una volta definito l'ambito di appartenenza, per le aste singole e per le strutture di tipo a) non si richiede la valutazione degli effetti del II ordine trascurandone gli effetti o considerandoli in maniera forfaitaria, per quelle di tipo b) si richiede la verifica previo la valutazione di tali effetti anche con metodi approssimati; per le aste e le strutture di tipo c), infine, si prescrivono metodi accurati di verifica o se ne sconsiglia del tutto l'uso.

L'entità degli effetti del II ordine (spostamenti, sollecitazioni) che individua il passaggio dal tipo a) al tipo b) di struttura, è generalmente assunta pari al 10% degli effetti corrispondenti del I ordine; più varia nelle diverse normative è la definizione della frontiera tra le strutture di tipo b) e c).

7.4.1 Aste singole

Una valutazione indiretta dell'entità degli effetti del secondo ordine si può effettuare attraverso il moltiplicatore critico del carico assiale negli elementi compressi. Il fattore che in una struttura elastica esprime l'entità degli effetti del II ordine, utilizzando solo il primo termine dello sviluppo in serie di seni della soluzione della equazione differenziale dell'asta

caricata di punta, è riportato in (7.3), in funzione del moltiplicatore critico dei carichi α_{cr} .

Se si considera la colonna con diagramma lineare di momento variabile tra il valore $N \cdot e_1$ ed il valore $N \cdot e_2$, con il primo maggiore del secondo, una formulazione più accurata del coefficiente ψ , derivata in maniera analoga al caso di solo carico assiale utilizzando solo il primo termine dello sviluppo in serie, è fornita dalla espressione seguente:

$$\psi = \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{\alpha_{cr}} \cdot \left[\frac{4}{\pi} \cdot \frac{e_2}{e_1} + \frac{8}{\pi^2} \left(1 - \frac{e_2}{e_1} \right) - 1 \right] \right\} \quad (7.5)$$

Nota pertanto il moltiplicatore critico dei carichi, è possibile conoscere con buona precisione l'entità degli effetti del II ordine che occorre prevedere.

Nelle strutture in c.a. la valutazione del carico critico è però resa complessa dalla forte non linearità del comportamento delle aste singole e delle strutture intelaiate, dovuta sia al legame costitutivo del calcestruzzo non lineare in compressione sia, prevalentemente, alla fessurazione che modifica in maniera significativa la rigidità flessionale delle membrature. Pertanto le formulazioni normative, pur ispirandosi alla stessa filosofia e facendo affidamento al moltiplicatore critico per definire l'entità degli effetti del II ordine, assumono aspetti talora diversi nell'intento di tener conto della non linearità meccanica delle membrature.

Alcune normative prediligono la massima semplicità possibile nel definire una serie di casi in cui le verifiche del II ordine, sempre relativamente complesse, possono essere evitate. La grande semplicità, che sembra essere l'obiettivo di tali proposte, insieme alla necessaria cautela nel definire un metodo che effettivamente escluda dalla analisi del II ordine solo i casi in cui tali effetti siano effettivamente trascurabili, ha però come contropartita talora una eccessiva cautela, nel senso che sulla base di tali proposte sono considerati esclusi dalla analisi del II ordine solo membrature i cui effetti sono assai piccoli, al più di qualche per cento, in altri casi una scarsa affidabilità accomunando nelle stesse modalità di verifica casi con piccoli effetti del II ordine e casi con amplificazioni significative dei momenti del I ordine.

Si citano al riguardo il D. M. 14/2/92 e precedenti che, nell'ambito del metodo di verifica alle tensioni ammissibili, fissa il limite di 50 sulla snellezza delle membrature al di sotto del quale non occorre tener conto degli effetti del II ordine, e le norme ACI che fissano un limite analogo anche se molto più basso ($\lambda \leq 22$). Il primo limite è talora non conservativo, il secondo è molto conservativo per carichi assiali modesti ed alti livelli di armatura, è non conservativo per valori medi ed elevati del carico assiale.

Altre norme fissano limiti più articolati con l'intento di fornire un discriminante più accurato tra i casi in cui occorre o non occorre una analisi del II ordine. Si citano al riguardo il D.M. '96 e l'EC2 che propongono formulazioni diverse ma comunque più complesse di quelle precedenti per definire il campo in cui gli effetti del II ordine sono trascurabili.

Secondo l'EC2 una colonna isolata si deve considerare snella se per la snellezza λ risulta:

$$\lambda^* \geq \max \left(25, \frac{15}{\sqrt{v_u}} \right) \quad (7.6)$$

essendo $v_u = N_{sd}/A_c f_{cd}$ il carico normale di calcolo adimensionalizzato.

In genere, per esigenze di calcolo, sono considerate isolate anche colonne appartenenti a telai a nodi fissi, che possono essere soggette ad eccentricità variabili lungo l'elemento dal valore e_{01} [=M₁/N] al valore e_{02} [=M₂/N]; in tal caso il limite di snellezza al di sotto del quale non è richiesta la verifica è fornito dalla relazione:

$$\lambda_{crit} = 25 \cdot \left(2 - \frac{e_{01}}{e_{02}} \right) \quad (7.7)$$

che ovviamente aumenta passando dal caso di eccentricità costante a quello di eccentricità bitriangolare (Fig. 7.13).

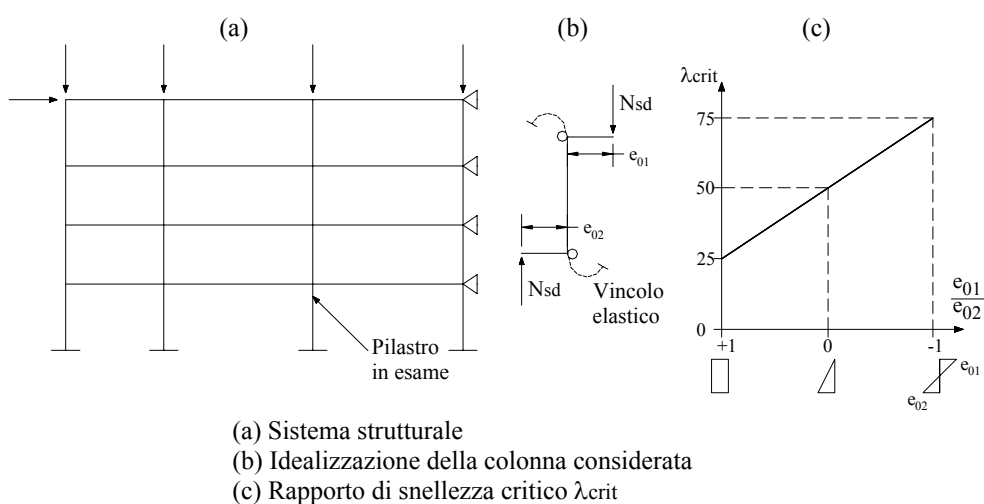


Fig. 7.13: Limiti di snellezza per elementi isolati con estremità vincolate rigidamente o elasticamente in strutture a nodi fissi

Il D.M. LL.PP. 9/1/1996 fornisce una espressione diversa per la stessa snellezza:

$$\lambda^* = 60 \frac{1+15 \cdot \rho}{\sqrt{N_{Sd} / A_c}} \quad (7.8)$$

Queste formulazioni, significativamente diverse, possono vedersi entrambe come derivate dalla condizione che gli effetti del II ordine, in aste con la snellezza pari a quella limite λ^* , siano pari al 10% dei corrispondenti effetti del I ordine. Infatti uguagliando il coefficiente ψ ad 1.1, e risolvendo rispetto alla snellezza $\lambda=L_o/i$ con le seguenti ipotesi:

- si trascura il contributo all'inerzia dell'armatura,
- si pone davanti al modulo di rigidezza della sezione di solo calcestruzzo il coefficiente riduttivo 0.20 per tener conto della fessurazione e del comportamento non lineare del calcestruzzo,
- si assume il rapporto tra modulo elastico di progetto ($E_{cd}=E_{ck}/1.5$) e resistenza di progetto del calcestruzzo pari a 1250,

si ottiene un limite sulla snellezza poco diverso da quello fornito dall'EC2:

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{0.20 \cdot \pi^2 \cdot E_c}{11 \cdot f_{cd}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N_{Sd} / (A_c \cdot f_{cd})}} \cong 15 \frac{1}{\sqrt{N_{Sd} / (A_c \cdot f_{cd})}} \quad (7.9)$$

Diversamente:

- considerando l'apporto dell'armatura nella valutazione del momento di inerzia con un copriferro cautelativo pari a 0.1 h,
 - assumendo un coefficiente riduttivo davanti al modulo di rigidezza EI_1 (di sezione non fessurata) pari a 0.20,
 - assumendo un modulo elastico di progetto ($E_{cd}=E_{cm}/1.5$) pari a 20.000 N/mm²,
- per armature correnti si ottiene:

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{0.20 \cdot \pi^2 \cdot E_c}{11}} \cdot \frac{\sqrt{1+1.92 \cdot n \cdot \rho}}{\sqrt{N_{Sd} / (A_c)}} \cong 60 \frac{1+15 \cdot \rho}{\sqrt{N_{Sd} / (A_c)}} \quad (7.10)$$

Si osserva che il rapporto di 1250 tra modulo elastico e resistenza di progetto ed il modulo elastico di progetto pari a 20.000 Nmm⁻² sono caratteristici di un calcestruzzo di classe intermedia ($f_{ck}=25$).

Entrambe le precedenti definizioni della snellezza λ^* si basano su di una definizione convenzionale del modulo di rigidezza EI della sezione per tener conto dell'effetto della fessurazione, assunto pari al 20% di quello della sezione di solo calcestruzzo nel primo caso, o di quello della sezione omogeneizzata non fessurata nel secondo. Tuttavia tali riduzioni forfetarie non tengono conto in maniera adeguata dei parametri del problema con l'intento di fornire formulazioni di semplice uso; nel primo caso inoltre si prescinde dalla armatura, che fornisce un contributo non trascurabile, con la parziale giustificazione che

nelle fasi iniziali di progetto questa non è sempre definita.

Una formulazione alternativa può essere ricavata facendo riferimento al modulo di rigidezza EI della sezione fessurata in assenza di sforzo assiale. La scelta della rigidezza in flessione pura ha infatti la prerogativa di rappresentare una rigidezza minima nel campo della pressoflessione in quanto al crescere dello sforzo normale di compressione aumenta la sezione reagente e l'inerzia corrispondente.

La scelta di valutare gli effetti del II ordine sulla base della rigidezza delle sezione fessurata in flessione semplice viene effettuata nelle norme ACI .318-89 che a tale scopo prescrivono l'utilizzo di un momento di inerzia convenzionale I_2' poco diverso da I_2 .

$$I_2' = 0.2 I_c + n I_s > 0.4 I_c$$

essendo I_c ed I_s i momenti di inerzia baricentrici del solo calcestruzzo e dell'armatura rispettivamente, ed n il rapporto tra modulo elastico del ferro ed istantaneo del calcestruzzo.

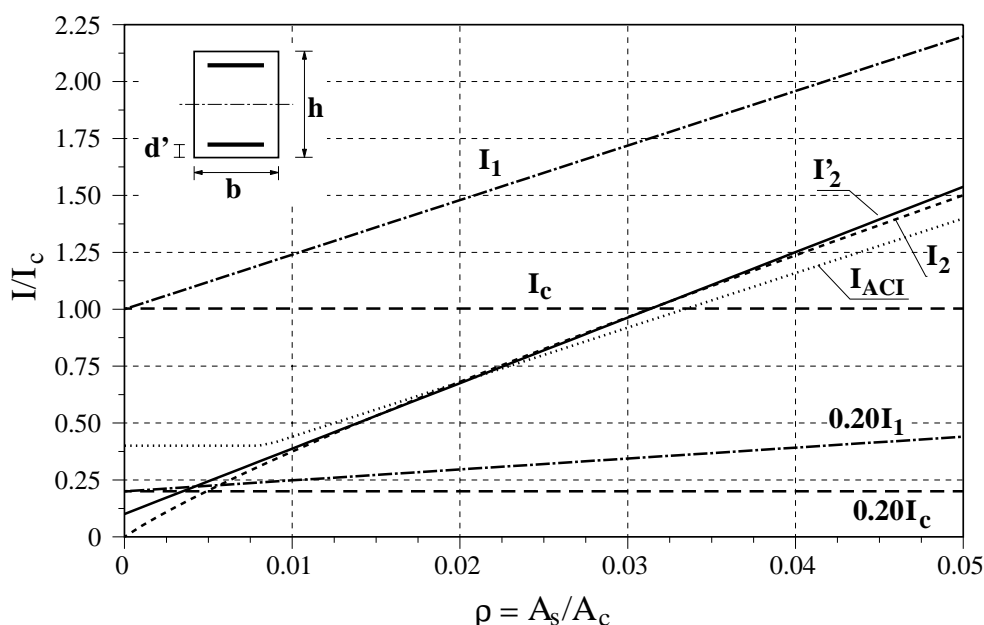


Fig. 7.14: Momenti di inerzia al variare della percentuale di armatura

Sono riportati a confronto gli andamenti al variare della percentuale di armatura dei momenti di inerzia I_1 , I_2 , I_2' , $0.2 I_1$, opportunamente adimensionalizzati rispetto ad I_c . Si osservano gli andamenti fortemente differenziati dei diversi parametri di rigidezza ed in particolare che gli andamenti di $0.2 I_c$ e $0.2 I_1$ sono significativamente più bassi di I_2 per percentuali di armatura usuali.

Pertanto, assumendo per l'inerzia I_2 l'espressione approssimata molto vicina al valore esatto (cfr. Fig 7.14):

$$I_2' = 0.1 \cdot I_c \cdot (1 + 36 \cdot (1 - 4 \cdot \delta + 4 \cdot \delta^2) \cdot n \cdot \rho) = 0.1 \cdot I_c \cdot (1 + k_\delta \cdot n \cdot \rho) \quad (7.11)$$

con δ copriferro adimensionalizzato rispetto alla altezza della sezione, si può ricavare dalla (7.3) la seguente espressione per il valore discriminante della snellezza:

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{0.01 \cdot \pi^2 \cdot E_c}{1.1 \cdot f_{cd}} \cdot \frac{\sqrt{1 + k_\delta \cdot n \cdot \rho}}{\sqrt{N_{Sd}/(A_c \cdot f_{cd})}}} \cong 0.30 \sqrt{\frac{E_c}{f_{cd}} \cdot \frac{\sqrt{1 + 24 \cdot n \cdot \rho}}{\sqrt{N_{Sd}/(A_c \cdot f_{cd})}}} \quad (7.12)$$

Nelle precedenti espressioni il coefficiente di omogeneizzazione n è il rapporto tra il modulo elastico dell'acciaio ed il modulo elastico istantaneo del calcestruzzo in quanto occorre definire il modulo di rigidezza per deformazioni istantanee $E_c I_2'$ mentre il comportamento viscoso del materiale è tenuto in conto, come si vedrà nel seguito, con un incremento della deformata del primo ordine; il valore 24 assunto per il coefficiente k_δ è conservativo per un copriferro adimensionalizzato non superiore a 0.1.

Per la generica asta caricata in compressione, per tener conto dell'influenza dell'andamento dei momenti sull'entità percentuale degli effetti del II ordine, si può ricavare la snellezza λ^* in funzione del rapporto delle eccentricità e_2/e_1 (cfr. 7.5). Si ottiene in tal caso:

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{0.1}{0.91 + 0.46 \cdot (e_2/e_1)} \cdot \frac{\sqrt{E_{cd}}}{\sqrt{f_{cd}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + 24 \cdot n \cdot \rho}}{\sqrt{N_{Sd}/(A_c \cdot f_{cd})}}} \quad (7.13)$$

Considerando i tre valori del rapporto $e_2/e_1 = 0, 0.4, 1.0$, la prima radice funzione del rapporto e_2/e_1 assume i valori: 0.2994, 0.2754, 0.2482 in luogo del valore 0.3 fornito nella relazione (7.12). Lo scarto tra la condizione più gravosa ($e_2/e_1=1$) e la condizione meno gravosa ($e_2/e_1=0$) è circa del 17% in termini di snellezza.

La maggiore complicazione della formula consente tuttavia di ampliare il campo di applicazioni in cui si può prescindere dalla valutazione degli effetti del II ordine, risparmiando operazioni di complessità generalmente superiore.

Gli andamenti delle snellezze λ^* nelle diverse formulazioni sono riportati in Fig. (7.15) nel caso $e_2/e_1 = 0.4$.

In essa oltre alla snellezza valutata con la (7.13) denominata λ_{MISF} (Metodo dell'Inerzia della Sezione Fessurata) è riportata la snellezza **Proposta** pari al 90 % della precedente ($\lambda_{PROP} = 0.9 \lambda_{MISF}$).

Questa correzione è stata introdotta a valle di una analisi numerica volta a verificare l'entità reale degli effetti del II ordine per $\lambda = \lambda^*$ in un esteso campo parametrico in cui si è fatta variare l'eccentricità ($e_2/e_1 = 0.0 \div 1.0$), la resistenza caratteristica del calcestruzzo ($f_{ck} = 20 \div 50 \text{ N/mm}^2$), il carico assiale ($\nu = 0.1 \div 0.7$), la percentuale di armatura ($\rho = 0.005 \div 0.05$), il copriferro adimensionalizzato ($d'/h = 0.05 - 0.10$).

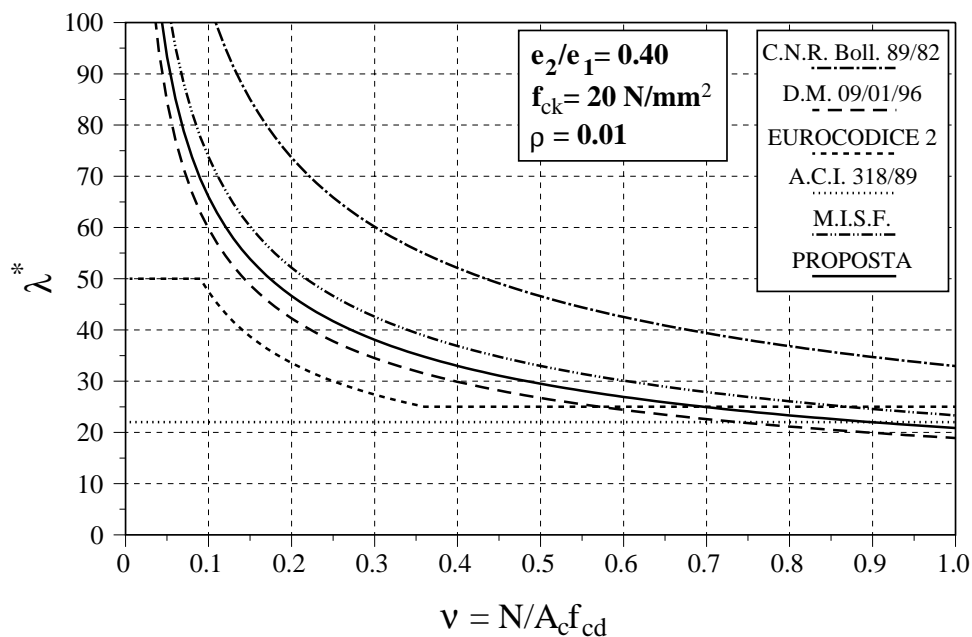


Fig. 7.15: Snellezza λ^* nelle varie formulazioni

Con l'introduzione di tale correzione la snellezza garantisce il rispetto del criterio generale che vuole gli effetti del secondo ordine inferiori al 10% di quelli del primo ordine in tutto il campo parametrico esaminato. Inoltre si osserva che la snellezza sopra definita fornisce valori degli effetti del II ordine con una minore variabilità rispetto alle altre formulazioni al variare dei parametri da cui essa dipende.

In figura 7.15, oltre alle curve relative alle normative citate, è anche riportato l'andamento ottenibile seguendo le istruzioni CNR Boll. 89/82, che indicano:

$$\lambda^* = 15 \cdot \frac{1 + 15 \cdot \rho}{0.6 \cdot \sqrt{N / (A_c f_{cd})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{f_{cd} / 17.5}} \quad (7.14)$$

con la resistenza espressa in N/mm^2 .

In tale confronto si osserva che la formulazione proposta si colloca al di sotto della CNR '82, ed al di sopra delle rimanenti, permettendo una economia nella progettazione, pur in aderenza ai requisiti di sicurezza enunciati dalla generalità delle normative.

7.4.2 Le strutture intelaiate

Passando dalle aste alle strutture si osserva che, in presenza o meno di elementi di controvento, una struttura viene considerata a nodi fissi se le sollecitazioni aggiuntive indotte dagli spostamenti dei nodi sono trascurabili. Ad esempio l'Eurocodice considera a nodi fissi i telai piani in cui gli spostamenti valutati utilizzando la teoria del I ordine determinano incrementi non superiori al 10% delle sollecitazioni calcolate con la teoria lineare. Ovviamente, in presenza di controventi costituiti da pareti di taglio o da nuclei di notevole rigidezza, si può ritenere che la struttura sia a nodi fissi a priori. A tal proposito si può fornire un criterio approssimato riportato in alcune normative per stabilire se il controvento è efficace nel contrastare gli spostamenti orizzontali. Esso consente di ritenere a nodi fissi le strutture multipiano con n piani per le quali sia verificato il controllo seguente:

$$h_{tot} \cdot \sqrt{\frac{F_v}{E_{cm} I_c}} \leq 0.2 + 0.1 \cdot n \quad \text{per } n \leq 3 \quad (7.15)$$

$$h_{tot} \cdot \sqrt{\frac{F_v}{E_{cm} I_c}} \leq 0.6 \quad \text{per } n \geq 4 \quad (7.16)$$

Nelle relazioni (7.15-7.16) h_{tot} rappresenta l'altezza totale del controvento e della struttura, $E_{cm} I_c$ rappresenta la somma delle rigidezze flessionali degli elementi di controvento (pilastri o pareti di controvento) ed F_v , la somma di tutti i carichi verticali (agenti sui controventi e sugli elementi controventati) in condizioni di esercizio.

Se le condizioni indicate in precedenza non sono soddisfatte, la struttura è da classificare a nodi mobili, ed il calcolo delle sollecitazioni deve essere condotto tenendo conto anche degli effetti degli spostamenti dei nodi. Va tuttavia sottolineato che l'essere la struttura a nodi fissi non esclude la possibilità che le singole membrature siano singolarmente snelle e quindi bisognevoli di una verifica di stabilità locale.

Per valutare se il generico telaio multipiano a maglie rettangolari è a nodi fissi o a nodi mobili, e quindi se occorre tener conto degli effetti del II ordine globali (connessi agli spostamenti di piano) ovvero è sufficiente un'analisi locale (all'instabilità della membratura considerando fissi i nodi di estremità), può essere conveniente utilizzare l'indice globale di stabilità Q per l'intera struttura. Tale indice si ricava a partire dagli indici di piano Q_i definiti nel seguente modo:

$$Q_i = \frac{\sum N_{Sd} \cdot \Delta_{0i}}{T_{Sd} \cdot h_i} \quad (7.17)$$

essendo:

$\sum N_{Sd}$ = sforzo normale complessivo di piano al piano i -esimo;

T_{Sd} = tagliante di piano al piano i -esimo;

Δ_{0i} = spostamento relativo tra il piano i -esimo ed il piano $i-1$;

h_i = altezza d'interpiano.

I coefficienti Q_i sopra definiti, calcolati considerando una rigidezza delle aste convenzionalmente non fessurate, rappresentano il rapporto tra i momenti aggiuntivi di piano del II ordine prodotti dallo sforzo normale di piano ($\sum N_{Sd}$ per gli spostamenti relativi Δ_{0i}) ed i momenti prodotti dai taglianti di piano T_{Sd} ($T_{Sd} h_i$), cioè i momenti di piano del I ordine.

L'indice di stabilità Q si definisce allora come il massimo dei valori Q_i valutati piano per piano.

Si osserva che l'indice di stabilità rappresenta una stima abbastanza precisa dell'inverso del moltiplicatore critico dei carichi α_{cr} , ($Q \cong 1/\alpha_{cr}$), per il quale si avrebbe divergenza dell'equilibrio nella generica struttura; pertanto, in analogia a quanto ricavato per l'asta caricata assialmente, il coefficiente ψ appresso definito:

$$\psi = \frac{1}{1-Q} \cong \frac{1}{1-1/\alpha_{cr}} \quad (7.18)$$

costituisce il fattore amplificativo delle sollecitazioni del I ordine per effetto degli spostamenti dei nodi.

La relazione tra indice di stabilità Q e moltiplicatore critico dei carichi spiega come lo stesso possa essere usato per valutare la sensibilità delle strutture agli effetti del II ordine.

In genere nelle costruzioni metalliche si impone che il moltiplicatore critico sia $\alpha_{cr} \geq 5$ ($Q \leq 0.20$), in modo da avere un coefficiente di sicurezza non inferiore a 5 nei confronti dell'instabilità globale, e si ammette di trascurare gli effetti del II ordine globali quando $\alpha_{cr} \geq 10$ ($Q \leq 0.10$).

Nelle strutture in c.a. il valore minimo di Q per il quale non occorre considerare effetti del II ordine deve essere più piccolo ($Q \leq 0.04$ in accordo alle norme A.C.I., equivalente ad un moltiplicatore critico $\alpha_{cr} \geq 25$). La scelta di un valore di soglia per il coefficiente Q più piccolo dipende dal fatto che la valutazione di Q è effettuata ipotizzando un comportamento elastico-lineare per la struttura nel suo complesso, mentre il c.a. è caratterizzato da un comportamento non lineare sia in compressione che, soprattutto, in trazione per effetto della fessurazione.

7.5 Metodi di analisi di strutture in c.a. sensibili agli effetti del II ordine

I metodi di analisi delle sollecitazioni in strutture sensibili agli effetti del II ordine dipendono dalla tipologia strutturale, colonna isolata o struttura complessa (intelaiata), e dall'essere la struttura a nodi fissi o a nodi mobili.

7.5.1 Colonne isolate

Nel caso di colonne isolate, l'analisi può essere condotta con il metodo della colonna modello determinando preliminarmente una eccentricità aggiuntiva del II ordine e considerando la stessa colonna caricata da una azione assiale N con una eccentricità totale, costante lungo l'elemento e pari a:

$$e_{tot} = e_0 + e_a + e_c + e_{II} \quad (7.19)$$

in cui:

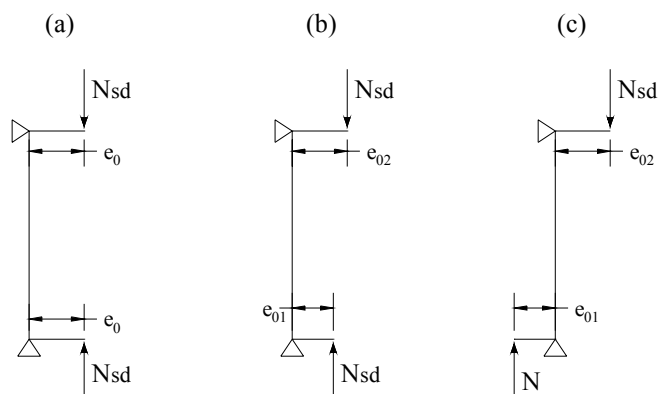
e_0 = eccentricità di calcolo del I ordine ($e_0 = M_{sd}/N_{sd}$) nel caso di momento costante o eccentricità nella sezione di incastro nelle colonne a mensola; se l'asta appartiene ad un telaio, l'eccentricità del I ordine varia generalmente lungo l'elemento dal valore e_{01} ad un estremo al valore e_{02} all'altro estremo (con $|e_{02}| > |e_{01}|$); in questo caso viene di regola usata un'eccentricità equivalente, da considerare costante lungo l'elemento, pari al massimo tra i due valori (Fig. 7.16):

$$e_{0,eq} = \max [(0.6 \cdot e_{02} + 0.4 \cdot e_{01}), (0.4 \cdot e_{02})] \quad (7.20)$$

e_a = eccentricità aggiuntiva dovuta alle imperfezioni geometriche, valutabile con la relazione:

$$e_a = v \cdot \frac{L_0}{2} \quad (7.21)$$

in cui v è l'inclinazione accidentale dell'elemento sulla verticale, posta pari al massimo tra i valori $\left[1/200, 1/(100 \cdot \sqrt{L})\right]$ con L in metri;



(a) Eccentricità uguali ad entrambe le estremità
 (b) e (c) Eccentricità diverse alle due estremità

Fig. 7.16: Schema tipo di eccentricità del primo ordine nella colonna

e_c = eccentricità addizionale viscosa, che non è prevista esplicitamente dall'EC2, ma che costituisce il modo più naturale, nell'ambito del metodo in esame, per considerare gli effetti dell'incremento degli spostamenti prodotti dalla viscosità del calcestruzzo; l'utilizzazione dell'eccentricità e_c è consigliata dal C.E.B. (Comité Eurointernational du Béton) e dalle istruzioni C.N.R., che forniscono la seguente relazione

$$e_c = e_I \cdot \left[\exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \varphi\right) - 1 \right] \quad (7.22)$$

essendo $\alpha = N_{gd}/N_{cr}$, il rapporto tra il carico permanente di calcolo ed il carico critico euleriano della sezione di solo calcestruzzo, $e_I = e_0 + e_a$ l'eccentricità del I ordine e φ il coefficiente di viscosità del calcestruzzo. Tale relazione, in presenza di quantità di armature non trascurabili, tende a sovrastimare l'influenza della viscosità, per cui è preferibile fare riferimento alla seguente formulazione modificata, che tiene conto dell'influenza dell'armatura:

$$e_c = e_I \cdot \alpha \cdot \frac{I_c/I_1}{\alpha - (1 - I_c/I_1)} \cdot \left[\exp\left(\frac{\alpha - (1 - I_c/I_1)}{1 - \alpha} \cdot \varphi\right) - 1 \right] \quad (7.23)$$

in cui compare in aggiunta il rapporto I_c/I_1 tra l'inerzia della sezione di solo calcestruzzo e l'inerzia della sezione completa calcestruzzo + armature; inoltre

anche il carico critico N_{cr} è valutato con riferimento all'inerzia I_1 complessiva.

e_{II} = eccentricità del II ordine, che può essere calcolata, come già anticipato, con il metodo della colonna modello.

Metodo della colonna modello:

Per la valutazione della eccentricità del II ordine e_{II} , si può adottare il metodo della colonna modello se risulta $\lambda \leq 140$ (cfr. EC2). Tale metodo riconduce la generica colonna al caso di colonna incastrata al piede e libera in sommità, di altezza $L=L_0/2$ e di sezione costante sia per geometria che per armatura, per la quale si assume in via semplificata < *priori* > una deformata di tipo sinusoidale (Fig. 7.17), espressa dalla relazione:

$$v(z) = a \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi z}{L_0} \right) \quad (7.24)$$

La semplificazione connessa alla scelta di una deformata di tipo predefinito non determina una grave imprecisione, come è possibile dimostrare anche con riscontri numerici. Grazie a tale assunzione la deformata della colonna, cui sono connessi gli effetti del II ordine, dipende solo dall'ampiezza a dello spostamento in sommità. Derivando due volte rispetto a z la relazione (7.24), si ottiene:

$$v''(z) = a \cdot \frac{\pi^2}{L_0^2} \cdot \cos \frac{\pi z}{L_0} \quad (7.25)$$

che, indicando con $1/r = v''(z=0)$ la curvatura della sezione di base, fornisce una semplice relazione tra l'ampiezza a dello spostamento e detta curvatura:

$$a = \frac{L_0^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (7.26)$$

Il momento totale nella sezione di base, comprensivo degli effetti del II ordine, si potrà esprimere in funzione della curvatura di base nel seguente modo:

$$M = M_I + M_{II} = N \cdot e_I + N \cdot e_{II} = N \cdot e_I + N \cdot a = N \cdot e_I + N \cdot \frac{L_0^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (7.27)$$

in cui, in presenza di effetti viscosi, vale $e_I = e_0 + e_a + e_c$ (cfr (7.19)).

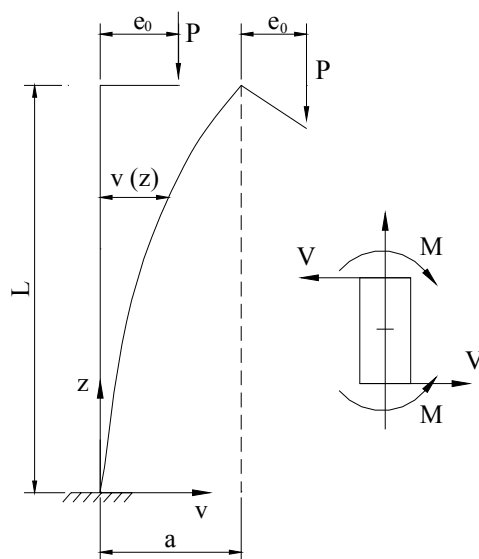


Fig. 7.17: Colonna modello

Alcune normative come l'EC2 ed il D.M. 9/01/96 assumono per l'eccentricità del II ordine la espressione poco diversa:

$$e_{II} = \frac{L_0^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{L_0^2}{10} \cdot \frac{1}{r} \quad (7.28)$$

Tale relazione esprime come cresce la curvatura di base al crescere degli effetti del II ordine e consente una verifica grafica della colonna. Infatti nel piano momento-curvatura della sezione critica (o eccentricità-curvatura), se la retta di equazione (7.27) interseca o è tangente al diagramma $M-1/r$, la verifica di sicurezza è soddisfatta in quanto al crescere dello spostamento in sommità per effetti del II ordine il momento resistente della sezione rimane maggiore o uguale a quello sollecitante, se invece la stessa retta passa al di sopra del diagramma momento curvatura, l'equilibrio non è più possibile allorché il momento sollecitante globale (comprensivo di quello del II ordine) diventa maggiore di quello resistente.

Nella Fig. 7.18 è riportata la costruzione grafica descritta nel piano eccentricità-curvatura a sforzo normale assegnato della sezione critica. In tale costruzione grafica e_1 rappresenta l'eccentricità complessiva del I ordine ed il valore dell'eccentricità del II ordine di equilibrio e_{II} si ottiene determinando la curvatura $(1/r)_A$ di intersezione (punto A in Fig. 7.18) tra la retta per e_1 di equazione (7.27) con pendenza $L_0^2/10$, e la curva eccentricità-

curvatura ($e-1/r$).

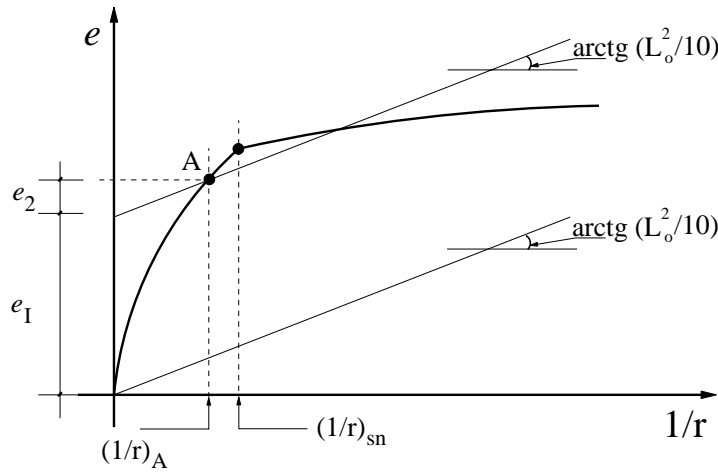


Fig. 7.18: Diagramma eccentricità-curvatura

Se si richiede il valore massimo compatibile della eccentricità del I ordine, occorre determinare l'intercetta con l'asse delle ordinate della retta tangente alla curva eccentricità-curvatura con pendenza $L_0^2/10$.

In via semplificata, si può evitare la costruzione precedente che parte dalla conoscenza del legame ($e-1/r$), valutando direttamente la curvatura $(1/r)_A$ di tangenza mediante la relazione approssimata fornita dall'EC2:

$$\frac{1}{r} = \frac{2 \cdot K_2 \cdot \varepsilon_{sd}}{0.9 \cdot d} \tag{7.29}$$

Tale curvatura corrisponde approssimativamente alla curvatura $(1/r)_{sn}$ della sezione allo snervamento delle armature, che individua il gomito del diagramma momento-curvatura. Pertanto il metodo approssimato di normativa, assumendo implicitamente una intersezione nel punto di gomito del diagramma momento curvatura, consente una determinazione generalmente in eccesso della eccentricità aggiuntiva del II ordine che la sezione di base deve sopportare in sede di verifica.

Il coefficiente $K_2 (\leq 1)$, introdotto nella (7.29), tiene conto della riduzione della curvatura per effetto dello sforzo normale; a vantaggio di sicurezza si può assumere $K_2 = 1$.

Un ultimo aspetto da considerare è l'effettivo grado di vincolo della colonna reale. Se la colonna è effettivamente una mensola, come nelle ipotesi della colonna modello,

allora la lunghezza libera di inflessione è $L_0 = 2 \cdot L$ ed il metodo è direttamente applicabile.

Se invece la sommità della colonna è dotata di un certo grado di vincolo, allora bisognerà definire opportunamente la lunghezza libera di inflessione $L_0 = \beta \cdot L$, essendo β variabile tra 0.5 (colonna doppiamente incastrata) e 2 (colonna incastrata al piede e libera in sommità). E' comunque consigliabile adottare in ogni caso un valore minimo del coefficiente β più alto di 0.5, in considerazione delle incertezze presenti nella definizione dei vincoli, non ultima quella dovuta a possibili rotazioni delle fondazioni, che fanno degenerare il grado di incastro considerato alla base dell'elemento.

7.5.2 Strutture intelaiate

Per quanto concerne le strutture composte da più aste (telai) occorre tener presente che, in generale, si possono avere due tipi di effetti del II ordine:

- se esiste uno spostamento relativo Δ tra i due estremi della colonna, il carico verticale N provoca incrementi di momento per effetto dello spostamento laterale: effetti del II ordine "globali";
- inoltre il carico assiale N induce rispetto alla deformata della linea d'asse momenti aggiuntivi, effetti del II ordine "locali".

Il primo effetto è caratteristico delle strutture a nodi mobili, in quanto si verifica quando gli spostamenti laterali sono importanti; ad esso si sovrappone l'effetto locale. Per i telai a nodi fissi invece è presente solo l'effetto di instabilità locale.

7.5.3 Strutture intelaiate a nodi fissi

Per quanto detto, in una struttura intelaiata a nodi fissi gli spostamenti nodali, essendo trascurabili, non inducono effetti del II ordine. Sono invece presenti gli spostamenti del II ordine locali del singolo elemento, per cui è necessaria solo una verifica del II ordine di tipo locale.

Valutate le sollecitazioni del I ordine, è necessario estrarre le colonne dalla struttura, determinare la snellezza tenendo conto dell'effettivo grado di vincolo offerto dalle travi, per esempio utilizzando il *nomogramma* di Fig. 7.19a (*alignment chart*) riportato anche dall'Eurocodice che fornisce il valore del coefficiente β sulla base della rigidezza delle aste confluenti nel nodo, eseguire la verifica di instabilità della colonna considerata come isolata con il metodo dell'eccentricità totale di cui al paragrafo precedente.

Per la valutazione della lunghezza libera di inflessione $L_0 = \beta \cdot L$ della colonna con il nomogramma di fig. 7.19, occorre definire i parametri k_A e k_B , che rappresentano il grado di vincolo all'estremità delle colonne, dipendente dalla rigidezza delle aste concorrenti nei due nodi della colonna. Risulta infatti:

$$k_A \text{ (o } k_B) = \frac{\sum(E_{cm}I_{col}/L_{col})}{\sum(E_{cm}\alpha I_b/L_{eff})} \quad (7.30)$$

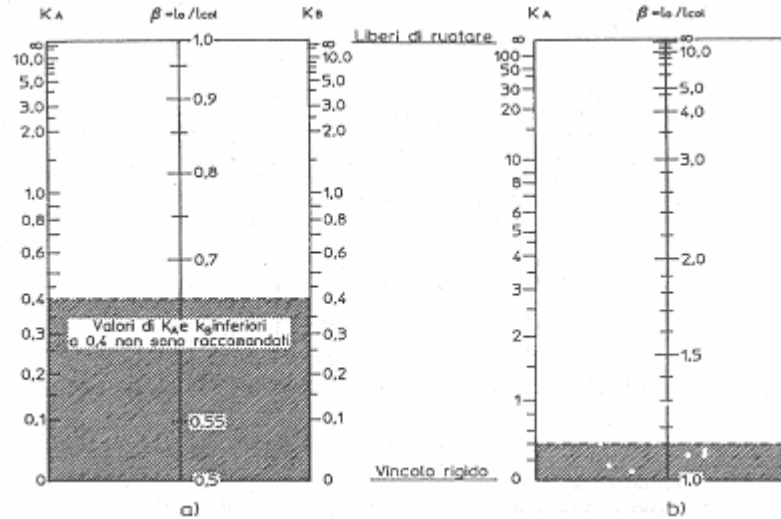


Fig. 7.19: Alignment charts

Nella relazione precedente E_{cm} rappresenta il modulo elastico del calcestruzzo eventualmente diverso nelle colonne e nelle travi, I_{col} ed I_b i momenti d'inerzia geometrici delle colonne e delle travi, L_{col} l'altezza della colonna misurata tra gli assi di vincolo ed L_{eff} la luce efficace o netta della trave, α un parametro che tiene conto delle condizioni di vincolo della trave all'estremità opposta ($\alpha = 1$ se l'estremità opposta è vincolata elasticamente o rigidamente, $\alpha = 0.5$ se l'estremità opposta è libera di ruotare, $\alpha = 0$ se la trave è una mensola).

Le normative fanno di solito riferimento a rigidezze flessionali EI degli elementi pari a quelle della sezione omogenea di solo calcestruzzo (cfr EC2). In realtà le armature presenti e la fessurazione del calcestruzzo sono tali da modificare, anche sensibilmente, le inerzie efficaci degli elementi e soprattutto i rapporti di rigidezza tra le travi e le colonne: infatti la parzializzazione delle sezioni per effetto della fessurazione è generalmente più importante per le travi che per i pilastri, per cui è maggiore il degrado di rigidezza.

Esistono in bibliografia e in altri codici (per esempio le norme ACI) espressioni alternative per ricavare la rigidezza EI dei vari elementi. Un criterio può essere quello di calcolare le inerzie in fase fessurata di travi e pilastri, tenendo conto dell'armatura, della parzializzazione della sezione e delle sollecitazioni agenti (l'asse neutro nel caso della pressoflessione dipende dall'eccentricità $e = M/N$); in via semplificata si può adottare per le

colonne la rigidezza geometrica $E_{cm}I_{col}$ e per le travi la rigidezza flessionale $0.5 \cdot E_{cm}I_b$, ridotta a causa della fessurazione.

7.5.4 Strutture intelaiate a nodi mobili - metodo generale

Nell'analisi di una struttura a nodi mobili (Fig. 7.20) occorre valutare da un lato le sollecitazioni del II ordine "globali", associate agli spostamenti laterali dei nodi della struttura, dall'altro le sollecitazioni del II ordine "locali", associate alla deformata dell'elemento.

Un'analisi rigorosa di strutture intelaiate a nodi mobili richiede l'uso di procedure di calcolo che considerino l'intero complesso strutturale con le sollecitazioni del II ordine, ed inoltre il comportamento non lineare delle sezioni e delle membrature. Ciò si può ottenere in genere discretizzando ciascuna asta della struttura in conci ed applicando un procedimento iterativo, fino a raggiungere l'equilibrio tra le azioni esterne e le sollecitazioni interne tenendo conto dello spostamento dei nodi. In tal modo si ottengono direttamente le sollecitazioni complessive sulla struttura comprensive degli effetti del II ordine, che considerano sia gli effetti globali (*lateral drift effect*) che quelli locali (*member stability effect*), nonché l'effettivo grado di vincolo di ciascuna asta (da cui dipende la relativa lunghezza libera di inflessione).

Di seguito si riportano alcuni metodi semplificati adatti alle applicazioni ingegneristiche correnti.

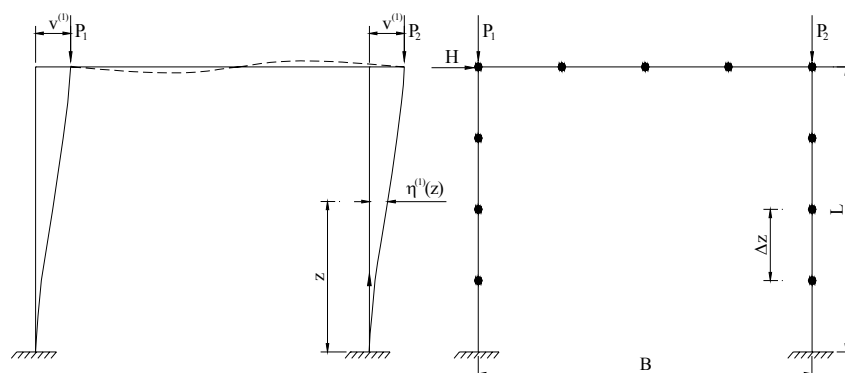


Fig. 7.20: Telai a nodi spostabili – discretizzazione

7.5.5 Strutture intelaiate a nodi mobili - metodi approssimati

Metodo N-A:

Tale metodo, consigliato anche dalle Istruzioni C.N.R., è applicabile a telai a maglie rettangolari e rappresenta un procedimento iterativo che sostituisce ai momenti del II ordine

prodotti sulle colonne dai carichi verticali $N_{j,i}$ per gli spostamenti nodali relativi Δ_i (Fig. 7.21), quelli prodotti da forze orizzontali F_i equivalenti di piano (che si sommano a quelle orizzontali eventualmente presenti), ricavate per equilibrio dai taglianti T_i di piano:

$$T_i = \frac{\sum_j N_{j,i} \cdot \Delta_i}{h_i} \quad (7.31)$$

La procedura è iterativa in quanto alla applicazione dei taglianti di piano fittizi corrispondenti alla iterazione k-esima corrisponde un incremento degli spostamenti di piano considerati nella stessa iterazione, e si arresta quando gli spostamenti (Δ_i) provocati dai carichi agenti e dalle forze equivalenti innanzi definite (cfr. 7.23) non variano più. In tal modo si ottengono dei momenti alle estremità delle aste che tengono conto già degli effetti del II ordine globali, cioè associati agli spostamenti dei nodi del telaio (*lateral drift effect*). Nella prima iterazione occorre considerare solo le eventuali azioni orizzontali del I ordine ed, inoltre, eventuali imperfezioni geometriche.

La verifica delle colonne va a questo punto eseguita con riferimento al diagramma dei momenti complessivo così determinato e valutando gli effetti del II ordine locali (*member stability effect*), per esempio mediante il metodo dell'eccentricità totale. Una volta valutati gli effetti del II ordine globali, si assume nelle colonne $\beta = 1$.

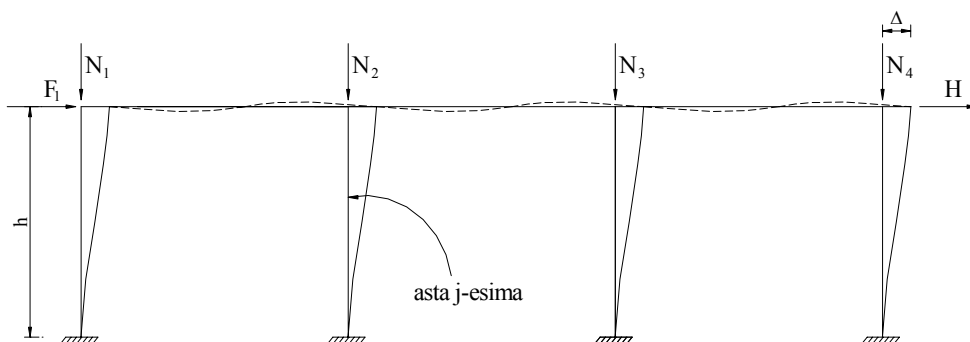


Fig. 7.21: Effetto N-Δ in un telaio ad un piano

Nell'analisi iterativa della struttura con le forze equivalenti di piano, si tiene conto quindi della sola non linearità geometrica se il calcolo è eseguito con riferimento alla rigidezza flessionale elastica EI degli elementi. Nel legame momento curvatura, questa è prossima, a meno delle armature, alla rigidezza tangente all'origine delle sezioni.

Al crescere del livello di sollecitazione la rigidezza secante EI varia a causa della non linearità meccanica dei materiali e della fessurazione del calcestruzzo. Pertanto un'analisi più accurata può tener conto di ciò, determinando ad ogni passo del processo

iterativo, una volta definite le sollecitazioni sugli elementi, i valori delle rigidzze secanti dedotte dai legami momento-curvatura. Essendo peraltro le rigidzze elementari EI variabili lungo l'asta a causa del valore della sollecitazione, si può far riferimento per ciascuna asta ad una rigidzza elementare media equivalente $(EI)_{eq}$ pari a (Fig. 7.22):

$$(EI)_{eq} = \frac{L}{\sum_i \Delta z_i / (EI)_i} \quad (7.32)$$

o in via ancora più semplificata, assumendo per le travi un'inertia ridotta ($EI_{eq}=0.5EI$).

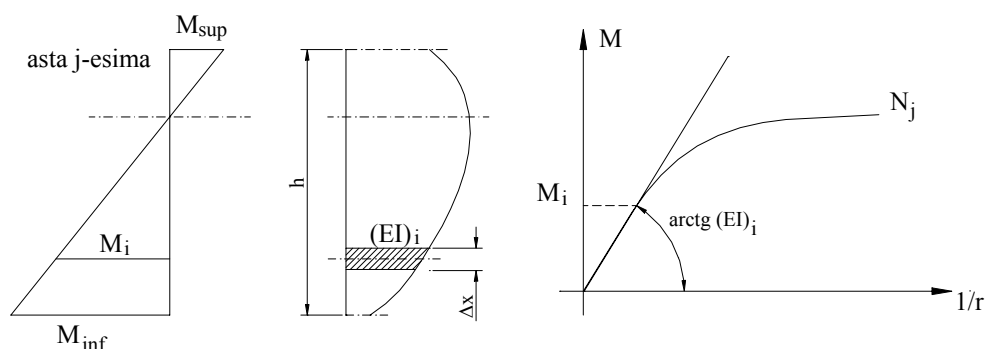


Fig. 7.22: Rigidezza lungo l'asse della colonna in campo non lineare

Metodo dell'amplificazione del momento:

Dividendo i momenti del I ordine che sollecitano la struttura in due aliquote, M_v provocati dai carichi verticali ed M_0 determinati dai carichi orizzontali e dalle imperfezioni geometriche, i momenti complessivi tenendo conto degli effetti del II ordine globali vengono valutati amplificando i momenti del I ordine M_0 dovuti ai carichi orizzontali (cioè quelli che provocano gli spostamenti dei nodi) mediante un fattore dipendente dal moltiplicatore critico dell'intero telaio:

$$M = M_v + \frac{M_0}{1 - 1/\alpha_{cr}} \quad (7.33)$$

Il moltiplicatore critico elastico α_{cr} è ricavabile in funzione dell'indice globale di stabilità Q ($Q \cong 1/\alpha_{cr}$) o in modo poco diverso con il metodo di Horne (cfr. Vol. 2, cap. 9).

Questo metodo consiste nell'eseguire un'analisi della struttura caricata con delle azioni orizzontali di piano pari al carico verticale trasmesso a quel piano, in modo tale che

il tagliante di piano sia pari al carico verticale complessivo di piano, e nel calcolare gli spostamenti relativi Δ_i di piano prodotti da questo sistema di forze. Il moltiplicatore critico approssimato è quindi fornito dalla relazione:

$$\alpha_{cr} = 0.9 \cdot \min (h_i/\Delta_i) \quad (7.34)$$

essendo Δ_i lo spostamento relativo al piano i ed h_i l'altezza di interpiano. Il metodo è generalmente conservativo; ad esempio si può dimostrare agevolmente che nei casi di portali con trave incernierata alle colonne e di portali con trave rigida incastrata alle colonne il metodo di Horne fornisce un valore molto prossimo al moltiplicatore critico.

Analogamente a quanto accade nel metodo $N-\Delta$, bisogna eseguire la verifica delle colonne considerando il diagramma dei momenti amplificato per gli effetti del II ordine globali, dedotti in virtù delle relazioni precedenti, ed applicando il metodo dell'eccentricità totale (con $\beta = 1$) per tener conto degli effetti locali.

Analisi mediante il modello delle colonne isolate:

Infine, anche nel caso di strutture intelaiate a nodi mobili, è possibile eseguire solo un'unica verifica di tipo locale, cioè considerare le colonne estratte dal telaio come delle colonne isolate e verificarle con i metodi per esse utilizzabili, avendo preventivamente definito per esse una snellezza equivalente, che tiene forfettariamente conto degli effetti del II ordine globali (*lateral drift effect*).

La definizione della lunghezza libera di inflessione deve essere fatta con riferimento al nomogramma di Fig. 7.19b (*alignment chart*) valido per le strutture a nodi mobili, in cui il valore del coefficiente β può variare da 1 fino all'infinito. I parametri k_A , k_B che tengono conto delle rigidità dei vincoli all'estremità della colonna vengono calcolati con la medesima relazione riportata in precedenza.

Tale metodo è tuttavia adatto a strutture regolari in cui le dimensioni e la snellezza dei pilastri di ciascun piano siano poco variabili. Negli altri casi è preferibile far riferimento al metodo $N-\Delta$ ovvero al metodo dell'amplificazione dei momenti.

7.6 Esercizi

ESERCIZIO 7.1

Verifica di una colonna isolata con effetti del II ordine

Si considera un capannone prefabbricato in c.a., costituito da 18 pilastri, 9 per lato, di altezza $L = 8.00$ m, con travi a campata singola poggiate sulle colonne mediante pacchetti di neoprene. Si intende eseguire la verifica di una colonna laterale, considerando gli effetti del II ordine.

Si riportano le caratteristiche dei materiali, le dimensioni geometriche della colonna, le sollecitazioni di calcolo su di essa agenti (valutate con i carichi amplificati mediante i coefficienti parziali di sicurezza γ_F).

Caratteristiche dei materiali:

$$f_{ck} = 35 \text{ N/mm}^2 \quad (R_{ck} = 45 \text{ N/mm}^2) \Rightarrow f'_{cd} = \frac{0.85 \cdot f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{0.85 \cdot 35}{1.50} = 19.8 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{sk} = 440 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow f_{sd} = \frac{f_{sk}}{\gamma_s} = \frac{4400}{1.15} = 382.6 \text{ N/mm}^2$$

Caratteristiche geometriche colonna:

$$L = 800 \text{ cm}, \quad b = 45 \text{ cm}, \quad h = 45 \text{ cm}, \quad d' = 3 \text{ cm}$$

$$A_{s1} = A_{s2} = 22.80 \text{ cm}^2 \quad (6 \phi 22), \text{ armatura simmetrica nel piano di flessione.}$$

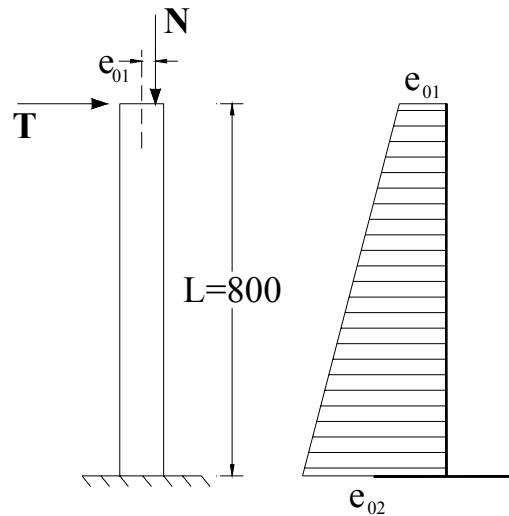
Sollecitazioni del I ordine:

carico verticale trasmesso dalla trave: $N_{sd} = 668.25 \text{ kN}$

momento flettente in testa alla colonna
provocato dall'eccentricità $e_{01} = 9.10 \text{ cm}$
dell'appoggio della trave rispetto all'asse del pilastro:

$$M_{sd1} = N_{sd} e_{01} = 668.25 \cdot 9.10 = 6075 \text{ kNcm}$$

momento flettente al piede della colonna,
somma del momento M_{sd1} e del momento $M_{sd2} = 6075 + 15750 = 21825 \text{ kNcm}$
dovuto all'azione orizzontale del vento



Come schema statico della colonna, dato il tipo di vincolo trave-colonna, si deve considerare quello di mensola incastrata al piede. Dal punto di vista della stabilità ciò equivale ad assumere un coefficiente $\beta = 2$, per cui la lunghezza libera di inflessione L_0 e la snellezza λ della colonna valgono rispettivamente:

$$L_0 = \beta L = 2 \cdot 800 = 1600 \text{ cm}$$

$$i = h/\sqrt{12} = 45/\sqrt{12} = 12.99 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{L_0}{i} = \frac{1600}{12.99} = 123$$

Si può osservare come la considerevole altezza dell'elemento, resa possibile anche dall'uso di materiali di caratteristiche elevate, e lo schema statico di mensola, invero frequente nei capannoni industriali, comportano una notevole snellezza della colonna, che dunque risulterà presumibilmente molto sensibile agli effetti del II ordine. La snellezza λ determinata risulta infatti molto superiore ai limiti indicati dall'EC2 per considerare snella una colonna isolata:

$$\lambda > \max(25, 15/\sqrt{v_u}) = \max(25, 15/\sqrt{0.166}) = \max(25, 36.7) = 36.7$$

Essendo v_u lo sforzo normale di calcolo adimensionalizzato.

$$v_u = \frac{N_{sd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{668250}{450 \cdot 450 \cdot 19.8} = 0.1666$$

La verifica della colonna viene eseguita utilizzando il metodo dell'eccentricità totale, che consiste nel valutare l'eccentricità totale

$$e_{tot} = e_0 + e_a + e_c + e_{II}$$

da cui si deduce il momento di calcolo M_{sd} dell'elemento.

Nella precedente relazione, come detto nel testo, e_0 rappresenta l'eccentricità del I ordine al piede della colonna (l'eccentricità equivalente per momenti variabili lungo l'asse dell'elemento va valutata solo nel caso di asta estratta da un telaio), e_a è l'eccentricità dovuta alle imperfezioni geometriche dell'elemento, e_c è l'eccentricità addizionale viscosa, e_{II} è l'eccentricità dovuta agli effetti del II ordine, che, essendo $\lambda < 140$, è valutabile secondo l'EC2 con l'ausilio del metodo della colonna modello. Si procede quindi alla determinazione dei vari termini.

Eccentricità al piede del I ordine:

$$e_0 = \frac{M_{sd2}}{N_{sd}} = \frac{21825}{668.25} = 32.66 \text{ cm}$$

Eccentricità aggiuntiva per imperfezioni geometriche:

Assumendo $\nu = 1/200$, si ottiene:

$$e_a = \nu \cdot \frac{L_0}{2} = \frac{1}{200} \cdot \frac{1600}{2} = 4 \text{ cm}$$

Eccentricità aggiuntiva viscosa:

Si valuta con l'ausilio della relazione (7.23):

$$\varphi = 2.5 \quad \text{coefficiente di viscosità}$$

$$E_s = 210000 \text{ N/mm}^2 \quad E_c = 33282.3 \text{ N/mm}^2$$

$$I_1 = I_c + nI_s = 341719 \cdot 10^4 + 6.31 \cdot 14328 \cdot 10^4 = 432129 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\frac{I_c}{I_1} = \frac{341719}{432129} = 0.7908$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E_c I}{L_0^2} = \frac{3.14^2 \cdot 33282.3 \cdot 432129 \cdot 10^4}{16000^2} = 5539180 \text{ N} = 5539.18 \text{ kN}$$

$$N_{gd} = N_{sd} = 668.25 \text{ kN}$$

L'eccentricità addizionale viscosa si calcola a partire dalla eccentricità del I ordine e_0 , associata ai carichi di lunga durata, e dall'eccentricità e_a dovuta alle imperfezioni:

$$\begin{aligned} e_c &= (e_{01} + e_a) \cdot \alpha \cdot \frac{I_c/I_1}{\alpha - (1 - I_c/I_1)} \cdot \left[\exp\left(\frac{\alpha - (1 - I_c/I_1)}{1 - \alpha} \cdot \varphi\right) - 1 \right] = \\ &= (32.66 + 4.00) \cdot 0.1205 \cdot \frac{0.7908}{0.1205 - (1 - 0.7908)} \cdot \left[\exp\left(\frac{0.1205 - (1 - 0.7908)}{1 - 0.1205} \cdot 2.5\right) - 1 \right] = \\ &= (32.66 + 4.00) \cdot 0.2394 = 8.79 \text{ cm} \end{aligned}$$

Eccentricità del II ordine:

L'eccentricità del II ordine e_2 si valuta con la relazione dedotta applicando il metodo della colonna modello:

$$e_2 = \frac{L_0^2}{10} \cdot \frac{1}{r}$$

in cui $1/r$ è la curvatura nella sezione critica al piede della colonna, che può essere valutata sulla base del diagramma momento-curvatura della sezione o con l'ausilio della relazione semplificata proposta dall'EC2 (si pone a vantaggio di sicurezza $K_2 = 1$):

$$\frac{1}{r} = \frac{2 \cdot \varepsilon_{sd}}{0.9 \cdot d}$$

Si ottiene quindi:

$$\varepsilon_{sd} = \frac{f_{sd}}{E_s} = \frac{382.6}{210000} = 1.8219 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{2 \cdot 1.8219 \cdot 10^{-3}}{0.9 \cdot 42} = 9.64 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

da cui:

$$e_2 = \frac{1600^2}{10} \cdot 9.64 \cdot 10^{-5} = 24.68 \text{ cm}$$

Eccentricità totale:

In definitiva l'eccentricità totale di calcolo vale:

$$e_{tot} = e_0 + e_a + e_c + e_2 = 32.66 + 4.00 + 8.79 + 24.68 = 70.13 \text{ cm}$$

che risulta sensibilmente superiore all'eccentricità e_{02} del I ordine al piede della colonna. Si osserva inoltre come le eccentricità aggiuntive dovute alle imperfezioni, alla viscosità ed agli effetti del II ordine comportano un incremento della sollecitazione flettente pari a circa il 114% della sollecitazione massima del I ordine.

In definitiva i valori di calcolo delle sollecitazioni sulla colonna risultano:

$$N_{Sd} = 668.25 \text{ kN}$$

$$M_{Sd} = N_{Sd} \cdot e_{tot} = 668.25 \cdot 70.13 = 46864.37 \text{ kNcm}$$

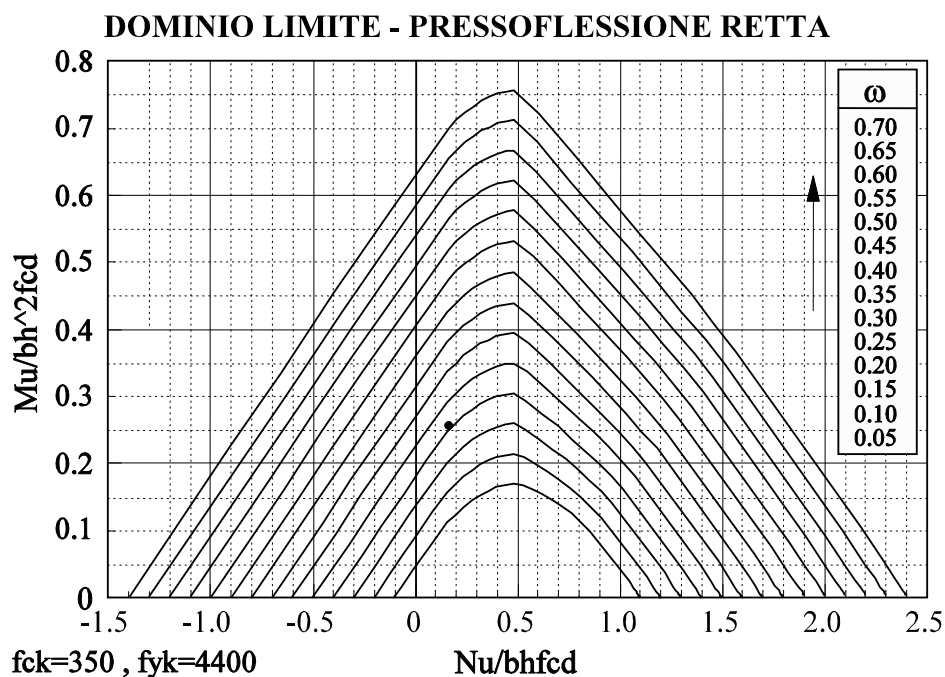
Si valutano quindi la percentuale meccanica di armatura $\omega = \omega'$, lo sforzo normale v_{sd} ed il momento μ_{sd} adimensionali:

$$\omega = \omega' = \frac{A_s \cdot f_{sd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{22.80 \cdot 382.6 \cdot 10^2}{450 \cdot 450 \cdot 19.8} = 0.218$$

$$v_{sd} = \frac{N_{Sd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{668250}{450 \cdot 450 \cdot 19.8} = 0.167$$

$$\mu_{sd} = \frac{M_{Sd}}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = \frac{46864.37 \cdot 10^4}{450 \cdot 450^2 \cdot 19.8} = 0.26$$

e nel dominio di resistenza a pressoflessione retta si verifica che le sollecitazioni di calcolo (v_{sd} , μ_{sd}) siano inferiori alle capacità ultime della sezione. La verifica è soddisfatta in quanto è richiesta una armatura con percentuale meccanica minore di quella adottata (0.218) corrispondente a 2*6 ϕ 22.

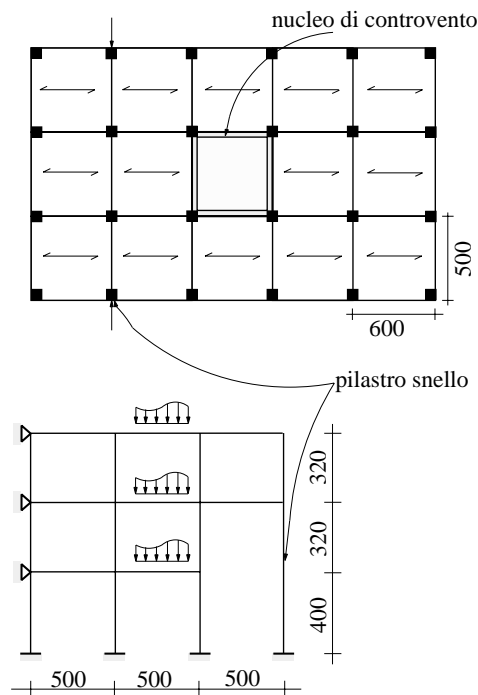


ESERCIZIO 7.2

Analisi del II ordine di un telaio a nodi fissi

Si considera la struttura a tre piani, la cui geometria è rappresentata nella figura: i telai trasversali mancano di una trave al primo piano, per cui il relativo pilastro presenta un'altezza considerevole. Si considera fisso in senso longitudinale il nodo intermedio del pilastro in esame per la presenza di travi longitudinali

La presenza di un nucleo di controvento, costituito dal blocco ascensore, consente di considerare la struttura complessivamente a nodi fissi per cui, come detto nel paragrafo 7.3, sono assenti effetti del II ordine globali, cioè associati agli spostamenti nodali. L'analisi di instabilità riguarda quindi il singolo pilastro, di cui occorre valutare la lunghezza libera di inflessione, tenendo conto del fatto che lo stesso appartiene ad un telaio e quindi risente degli effetti di vincolo esercitati dalle altre aste della struttura. Nel seguito si riportano i calcoli che si riferiscono al pilastro di cui sopra.



Caratteristiche dei materiali:

$$f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2 \quad (R_{ck} = 25 \text{ N/mm}^2) \Rightarrow f'_{cd} = \frac{0.85 \cdot f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{0.85 \cdot 20}{1.50} = 11.3 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{sk} = 380 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow f_{sd} = \frac{f_{sk}}{\gamma_s} = \frac{380}{1.15} = 330.4 \text{ N/mm}^2$$

$$E_c = 28847.6 \text{ N/mm}^2 \quad , \quad E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$$

Caratteristiche geometriche colonna:

$$L = 720 \text{ cm}, \quad b = 35 \text{ cm}, \quad h = 35 \text{ cm}, \quad d' = 3 \text{ cm}$$

Sollecitazioni del I ordine:

Il telaio è soggetto ai soli carichi verticali di calcolo Q_d agenti sulle travi, dovuti al carico permanente ed accidentale dei solai, ed al peso proprio delle strutture (il coefficiente

γ_g è scelto secondo l'EC2):

$$Q_d = 1.35 \cdot g_k + 1.50 \cdot q_k = 1.35 \cdot 36 + 1.50 \cdot 21 = 80.1 \text{ kN/m}$$

$$N_{sd} = 404.64 \text{ kN}$$

$$M_{sd1} = 942.32 \text{ kNcm} \quad \Rightarrow \quad e_{01} = 942.32 / 404.64 = 2.33 \text{ cm}$$

$$M_{sd2} = -1874.86 \text{ kNcm} \quad \Rightarrow \quad e_{02} = -1874.86 / 404.64 = -4.63 \text{ cm}$$

Il limite di snellezza per cui è richiesta la valutazione degli effetti del II ordine per colonne estratte da telai a nodi fissi è:

$$\lambda_{cr} = 25 \cdot \left(2 - \frac{e_{01}}{e_{02}} \right) = 25 \cdot \left(2 + \frac{2.33}{4.63} \right) = 62.5$$

Per valutare la snellezza della colonna si può utilizzare il nomogramma fornito dall'EC2.

$k_A = 0.4$ in realtà il valore della costante relativa all'incastro, dovrebbe essere inferiore a 0.4; ma è conveniente secondo l'EC2 non usare valori inferiori a 0.4 per tener conto di possibili incertezze dei vincoli (per esempio rotazioni in fondazione);

$$k_B = \frac{(EI/L)_1 + (EI/L)_2}{0.5 \cdot (EI/L)_3} = \frac{(I/L)_1 + (I/L)_2}{0.5 \cdot (I/L)_3} = \frac{1250520 / 720 + 1250520 / 320}{0.5 \cdot 5400000 / 500} = 1.04$$

Nella determinazione di k_B si è dimezzata la rigidezza della trave per tener conto della fessurazione. Utilizzando il nomogramma riportato nell'EC2 per i telai a nodi fissi, si ottiene:

$$\beta = 0.72 \Rightarrow L_0 = \beta \cdot L = 0.72 \cdot 720 = 518 \text{ cm}$$

$$\lambda = L_0 / i = 518 / (35 / \sqrt{12}) = 518 / 10.1 = 51 < \lambda_{cr}$$

cioè si rientra nel limite per cui non è necessario eseguire un'analisi del II ordine.

Ciò nonostante, per esercizio, si esegue la determinazione delle sollecitazioni del II ordine facendo riferimento al *metodo dell'eccentricità totale*.

Eccentricità equivalente del I ordine ($|e_{01}| < |e_{02}|$):

L'eccentricità equivalente del I ordine è la massima dei due valori seguenti:

$$e_{0,eq} = 0.6 \cdot e_{02} + 0.4 \cdot e_{01} = 0.6 \cdot (-4.63) + 0.4 \cdot 2.33 = -1.85 \text{ cm}$$

$$e_{0,eq} = 0.4 \cdot e_{02} = 0.4 \cdot (-4.63) = -1.85 \text{ cm}$$

per cui risulta:

$$e_{0,eq} = -1.85 \text{ cm}$$

Imperfezioni geometriche ed effetti della viscosità:

Le imperfezioni geometriche del telaio generano delle azioni equivalenti di piano sulla struttura di controvento e quindi non vengono considerate nel calcolo del telaio.

Inoltre essendo il rapporto $\alpha = N_{gd}/N_{cr}$ molto basso:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E_c I}{L_0^2} = \frac{3.14^2 \cdot 2884760 \cdot 125052}{518^2} = 13269070 \text{ N} \Rightarrow \alpha = \frac{N_{gd}}{N_{cr}} = \frac{404.64}{13269.07} = 0.0305$$

gli effetti della viscosità possono essere trascurati.

Eccentricità del II ordine:

L'eccentricità del II ordine e_{II} si valuta con la relazione dedotta applicando il metodo della colonna modello e considerando la lunghezza libera di inflessione definita in precedenza. Risultando questa minore della lunghezza effettiva dell'elemento (essendo la struttura a nodi fissi), l'applicazione del metodo della colonna modello consiste nel calcolare la freccia del II ordine in una sezione intermedia della colonna. Si ottiene quindi:

$$\varepsilon_{sd} = \frac{f_{sd}}{E_s} = \frac{330.4}{210000} = 1.573 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{2 \cdot \varepsilon_{sd}}{0.9 \cdot d} = \frac{2 \cdot 1.573 \cdot 10^{-3}}{0.9 \cdot 32} = 1.093 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

da cui:

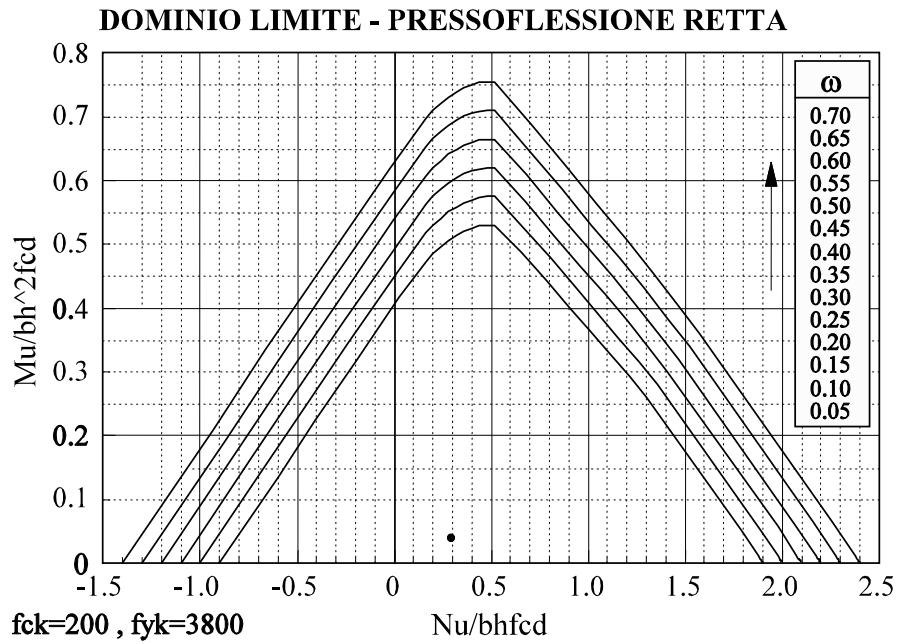
$$e_{II} = \frac{L_0^2}{10} \cdot \frac{1}{r} = \frac{518^2}{10} \cdot 1.093 \cdot 10^{-4} = 2.94 \text{ cm}$$

Eccentricità totale:

In definitiva l'eccentricità totale di calcolo vale:

$$e_{tot} = |e_{0,eq}| + e_{II} = 1.85 + 2.94 = 4.79 \text{ cm}$$

che risulta di poco superiore all'eccentricità $e_{II} = 4.63$ del I ordine in testa alla colonna. Si osserva quindi che per questo telaio a nodi fissi, gli effetti del II ordine non comportano un significativo incremento delle sollecitazioni di calcolo ($e_{tot}/e_{02} = 1.035$), come del resto era stato previsto per il verificarsi della condizione $\lambda < \lambda_{cr}$.



In definitiva i valori di calcolo delle sollecitazioni sulla colonna risultano:

$$N_{sd} = 404.64 \text{ kN}$$

$$M_{sd} = N_{sd} \cdot e_{tot} = 404.64 \cdot 4.79 = 1938.22 \text{ kNcm}$$

Si valutano quindi lo sforzo normale v_{sd} ed il momento μ_{sd} adimensionali:

$$v_{sd} = \frac{N_{sd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{404.64 \cdot 1000}{350 \cdot 350 \cdot 11.3} = 0.292$$

$$\mu_{sd} = \frac{M_{sd}}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = \frac{19382200}{350 \cdot 350^2 \cdot 11.3} = 0.040$$

e, dalla posizione del punto (v_{sd}, μ_{sd}) nel dominio di resistenza a pressoflessione retta della sezione, si deduce che sono sufficienti i minimi regolamentari di armatura.

