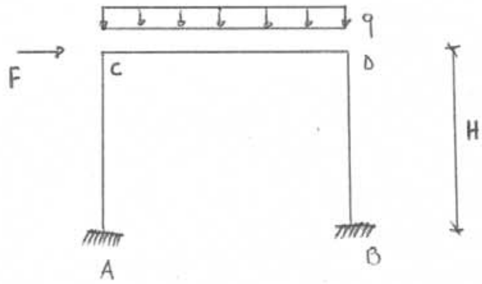
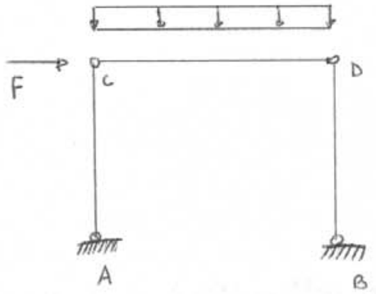
Analisi delle sollecitazioni su
Strutture intelaiate piane

Alcuni esercizi di base sul tema del
Portale ad un piano ed una campata

ESERCIZIO N. 1



Per stabilire se la struttura e' a nodi fissi o a nodi spostabili e' necessario determinare il grado di labilita' della struttura reticolare associata (l)



$t = 3$

$e = 4$

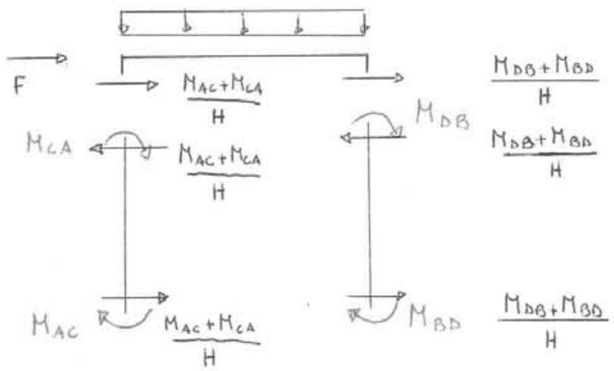
$l = 3t - 2e;\ l = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$

Essendo $l = 1$ la struttura e' ad 1 nodo spostabile.

Vettore delle incognite: $\underline{s} = \{ \varphi_C, \varphi_D, \delta_C \}$

Il sistema risolvente sara' costituito da:

- equilibrio nodale in C
- equilibrio nodale in D
- equilibrio alla traslazione orizzontale del traverso CD



$$\frac{M_{AC}+M_{CA}}{H}+\frac{M_{DB}+M_{BD}}{H}+F=0$$

In definitiva il sistema risolvente sarà il seguente:

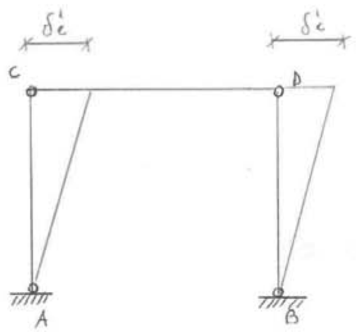
$$\begin{cases} M_{CA}+M_{CD}=0 \\ M_{DC}+M_{DB}=0 \\ \dfrac{M_{AC}+M_{CA}}{H}+\dfrac{M_{DB}+M_{BD}}{H}+F=0 \end{cases}$$

In esso è necessario esprimere il generico momento M_{ij} nella forma:

$$M_{ij}=W_{ij}\varphi_i+V_{ij}\varphi_j-U_{ij}\delta_{ij}+\mu_{ij}$$

E' necessario quindi determinare il valore dei parametri di rigidezza W_{ij}, V_{ij}, U_{ij} e μ_{ij} nonché il valore dello spostamento relativo δ_{ij} tra gli estremi i-j di ogni asta

Imponiamo uno spostamento virtuale δ'_c all'estremo C e costruiamo la deformata cinematica



Consideriamo positivi gli spostamenti che producono rotazione oraria dell'asta.

	δ'_c
δ'_{AC}	1
δ'_{CD}	0
δ'_{BD}	1

Per l'ipotesi di inestensibilità assiale, la relazione tra δ'_c e δ'_{ij} (spostamenti virtuali) e' la stessa tra δ_c e δ_{ij} (spostamenti reali). Possiamo quindi scrivere:

	δ_c
δ_{AC}	1
δ_{CD}	0
δ_{BD}	1

A questo punto e' possibile esprimere il generico momento M_{ij} nella forma

$$M_{ij} = W_{ij}\varphi_i + V_{ij}\varphi_j - U_{ij}\delta_{ij} + \mu_{ij}$$

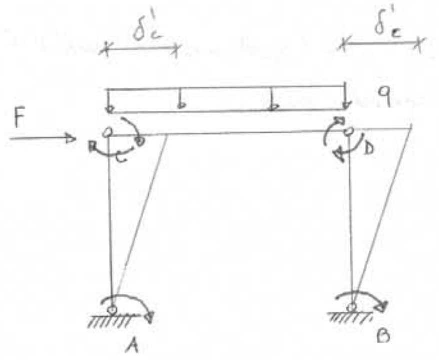
Il sistema risolvente sara' quindi composto da 3 equazioni nelle 3 incognite φ_C, φ_D, δ_c.
Determinati δ_c, φ_C e φ_D sara' quindi possibile esprimere il momento M_{ij} per ogni estremo delle aste. Dall'equilibrio di ogni asta si ricavano successivamente i tagli, mentre per gli sforzi normali sara' necessario considerare l'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale dei nodi C, D.

Osservazione:

La 3ª equazione e' stata determinata mediante l'equilibrio alla traslazione orizzontale del traverso CD. Cio' e' stato possibile in quanto il telaio e' a maglie rettangolari e quindi gli sforzi normali non compaiono nella scrittura di tale equazione.

Per telai di forma generica e' necessario ricorrere al Principio del lavoro virtuale applicato al sistema di forze composto da carichi esterni e coppie nodali, attuando una alla volta sulla struttura reticolare associata gli spostamenti impediti dai vincoli ausiliari necessari per rendere la struttura a nodi fissi.

Per il telaio in questione applichiamo uno spostamento virtuale δ'_c al nodo C e imponiamo che sia nullo il lavoro virtuale compiuto dai momenti M_{ij} di estremita', dalla forza F e dal carico q.



$$\left(M_{AC}+M_{CA}\right)\frac{\delta'_{CA}}{H}+\left(M_{CD}+M_{DC}\right)\cdot\varnothing+\left(M_{DB}+M_{BD}\right)\frac{\delta'_{BD}}{H}+F\delta'_c+L_q=0$$

$L_q=0$ perche' lo spostamento del risultante del carico distribuito q e' nullo.

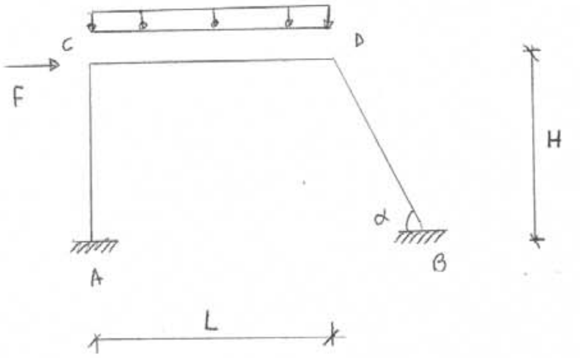
$$\left(M_{AC}+M_{CA}\right)\frac{\delta'_c}{H}+\left(M_{DB}+M_{BD}\right)\frac{\delta'_c}{H}+F\delta'_c=0$$

$$\left[\frac{M_{AC}+M_{CA}}{H}+\frac{M_{DB}+M_{BD}}{H}+F\right]\delta'_c=0$$

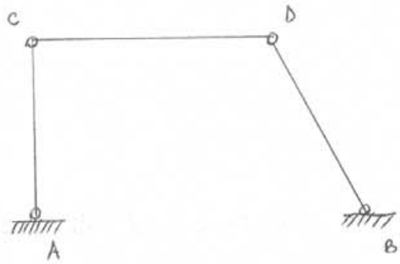
$$\frac{M_{AC}+M_{CA}}{H}+\frac{M_{DB}+M_{BD}}{H}+F=0 \quad \text{per ogni valore assunto da } \delta'_c$$

Abbiamo quindi ricavato l'equazione ottenuta mediante l'equilibrio alla traslazione orizzontale del traverso CD.

ESERCIZIO 2



Per stabilire se la struttura e' a nodi fissi o a nodi spostabili e' necessario determinare il grado di labilita' della struttura reticolare associata (l)



$t = 3$

$c = 4$

$l = 3t - 2c; \quad l = 1$

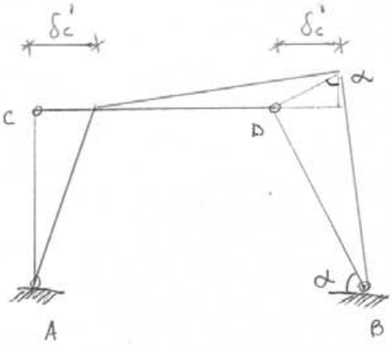
Essendo $l = 1$ la struttura e' ad 1 nodo spostabile

vettore delle incognite: $\underline{S} = \{\varphi_C, \varphi_D, \delta_C\}$

Il sistema risolvente sara' costituito da:

- equilibrio nodale in C
- equilibrio nodale in D
- principio del lavoro virtuale applicato al sistema costituito da momenti di estremita' e carichi esterni, imponendo alla struttura reticolare associata uno spostamento virtuale δ'_C

Per ricavare quest'ultima equazione costruiamo innanzitutto la deformata cinematica della struttura



Da semplici relazioni trigonometriche si ottengono le seguenti relazioni tra spostamento δ_c e spostamenti relativi di asta δ_{ij} (positivi se inducono rotazione oraria dell'asta)

	δ_c
δ_{AC}	1
δ'_{CD}	$-1/\mathrm{tg}\,\alpha$
δ'_{BD}	$1/\mathrm{sen}\,\alpha$

Per l'inestensibilità assiale la relazione tra δ'_c e δ'_{ij} (spostamenti virtuali) è la stessa tra δ_c e δ_{ij} (spostamenti reali)

	δ'_c
δ'_{AC}	1
δ'_{CD}	$-1/\mathrm{tg}\,\alpha$
δ'_{BD}	$1/\mathrm{sen}\,\alpha$

A questo punto, dopo aver calcolato i parametri di rigidezza, è possibile esprimere il generico momento M_{ij} in funzione di φ_i, φ_j e δ_{ij}

$$M_{ij} = W_{ij}\varphi_i + V_{ij}\varphi_j - U_{ij}\delta_{ij} + \mu_{ij}$$

$M_{AC} = V_{AC}\varphi_C - U_{AC}\delta_C$

$M_{CA} = W_{CA}\varphi_C - U_{CA}\delta_C$

$M_{CD} = W_{CD}\varphi_C + V_{CD}\varphi_D - U_{CD}(-\delta_C/tg\alpha) + \mu_{CD}$

$M_{DC} = W_{DC}\varphi_D + V_{DC}\varphi_C - U_{DC}(-\delta_C/tg\alpha) + \mu_{DC}$

$M_{BD} = V_{BD}\varphi_D - U_{BD}(\delta_C/sen\alpha)$

$M_{DB} = W_{DB}\varphi_D - U_{DB}(\delta_C/sen\alpha)$

Tali valori devono essere sostituiti nel sistema risolvente, che risulta quindi costituito da 3 equazioni nelle 3 incognite φ_C, φ_D e δ_C

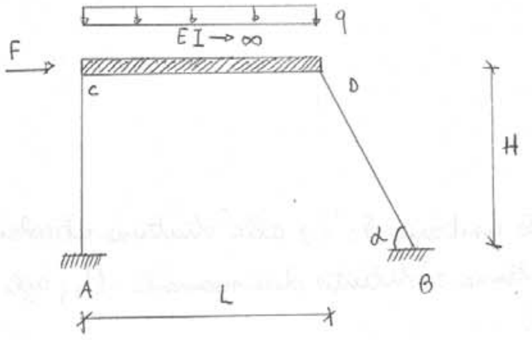
$$\begin{cases} M_{CD}+M_{CA}=0 \\ M_{DC}+M_{DB}=0 \\ (M_{AC}+M_{CA})\dfrac{\delta'_{AC}}{H} + (M_{CD}+M_{DC})\dfrac{\delta'_{CD}}{L} + (M_{BD}+M_{DB})\dfrac{\delta'_{BD}}{H/sen\alpha} + F\delta'_C - qL\dfrac{\delta'_C}{2tg\alpha} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{CD}+M_{CA}=0 \\ M_{DC}+M_{DB}=0 \\ (M_{AC}+M_{CA})\dfrac{\delta'_C}{H} - (M_{CD}+M_{DC})\dfrac{\delta'_C}{tg\alpha L} + (M_{BD}+M_{DB})\dfrac{\delta'_C/sen\alpha}{H/sen\alpha} + F\delta'_C - qL\dfrac{\delta'_C}{2tg\alpha} = 0 \end{cases}$$

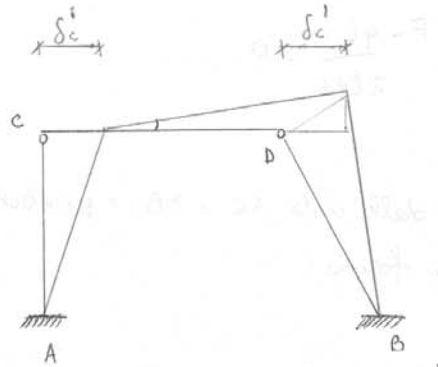
$$\begin{cases} M_{CD}+M_{CA}=0 \\ M_{DC}+M_{DB}=0 \\ \left[\dfrac{M_{AC}+M_{CA}}{H} - \dfrac{M_{CD}+M_{DC}}{Ltg\alpha} + \dfrac{M_{BD}+M_{DB}}{H} + F - q\dfrac{L}{2tg\alpha}\right]\cancel{\delta'_C} = 0 \end{cases}$$

Determinati δ_C, φ_C e φ_D sarà quindi possibile esprimere il momento M_{ij} per ogni estremo delle aste. Dall'equilibrio di ogni asta si ricavano successivamente i tagli, mentre per gli sforzi normali sarà necessario considerare l'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale dei nodi C e D.

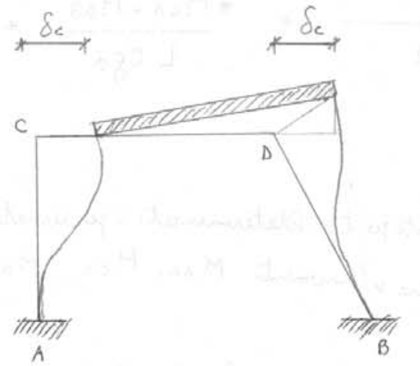
ESERCIZIO 3



Se l'asta CD non fosse infinitamente rigida (ESERCIZIO 2) le incognite sarebbero φ_C, φ_D e δ_C. Essendo l'asta rigida, le rotazioni φ_C e φ_D sono dipendenti da δ_C. L'unica incognita è quindi δ_C. Costruiamo ora la deformata cinematica della struttura



(DEFORMATA CINEMATICA)



(DEFORMATA REALE)

$$\varphi_C = \varphi_D = \frac{-\delta_C}{tg\alpha L}$$

	δ_C
δ_{AC}	1
δ_{CD}	$-1/tg\alpha$
δ_{BD}	$1/sen\alpha$

Per l'inestensibilità assiale la relazione tra spostamenti reali δ_C e δ_{ij} vale anche tra gli spostamenti virtuali δ'_C e δ'_{ij}

Sull'asta CD non possiamo determinare i parametri di rigidezza (essendo $EI \to \infty$) e quindi nemmeno M_{CD} e M_{DC}. Per l'equilibrio nei nodi C e D sappiamo però:

$$M_{CD} = -M_{CA}$$

$$M_{DC} = -M_{DB}$$

A questo punto applichiamo uno spostamento virtuale unitario $\delta_c' = 1$ alla struttura reticolare associata. Con riferimento al P.L.V. per il sistema costituito dai momenti M_{ij} agli estremi di ogni asta e ai carichi esterni avremo:

$$(M_{AC}+M_{CA})\frac{1}{H} - (M_{CD}+M_{DC})\cdot\frac{1}{L\,tg\alpha} + (M_{BD}+M_{DB})\cdot\frac{1}{H\,sen\alpha} + F - \frac{qL}{2tg\alpha} = 0$$

$$\frac{(M_{AC}+M_{CA})}{H} + \frac{M_{CA}+M_{DB}}{L\,tg\alpha} + \frac{M_{BD}+M_{DB}}{H} + F - \frac{qL}{2tg\alpha} = 0$$

Determinati i parametri di rigidezza delle aste AC e DB, è possibile esprimere i momenti M_{AC}, M_{CA}, M_{DB} e M_{BD} nelle forme:

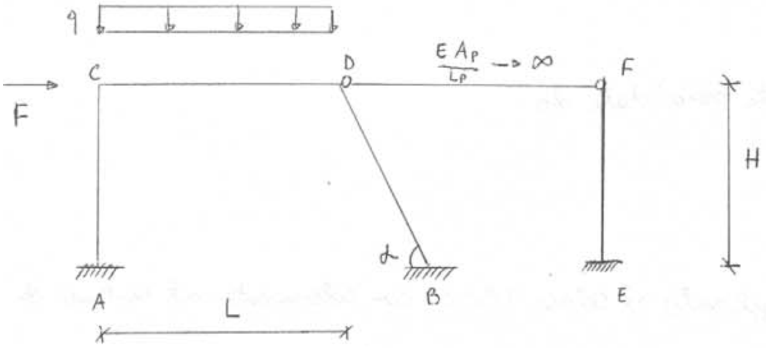
$$M_{ij} = W_{ij}\varphi_i + V_{ij}\varphi_j - U_{ij}\delta_{ij} + \mu_{ij}$$

Esplicitando tutti i momenti nelle equazione del P.L.V. si determina il valore dell'unica incognita δ_c, da cui si ricavano immediatamente φ_c e φ_D.

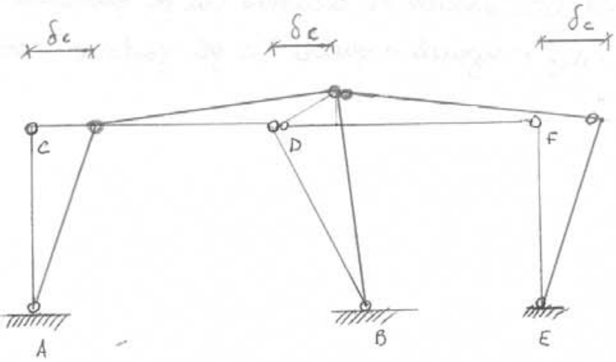
Noto δ_c sarà quindi possibile calcolare M_{AC}, M_{CA}, M_{DB} e M_{BD}. Per l'equilibrio dei nodi C e D saranno noti anche M_{CD} e M_{DC}.

Dall'equilibrio di ogni asta si ricavano successivamente i tagli, mentre per gli sforzi normali sarà necessario considerare l'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale dei nodi C e D.

ESERCIZIO 4



Per dire se la struttura e' a nodi fissi o a nodi spostabili e' necessario valutare il grado di labilita' della struttura reticolare associata.



$t = 4$

$c = 5$

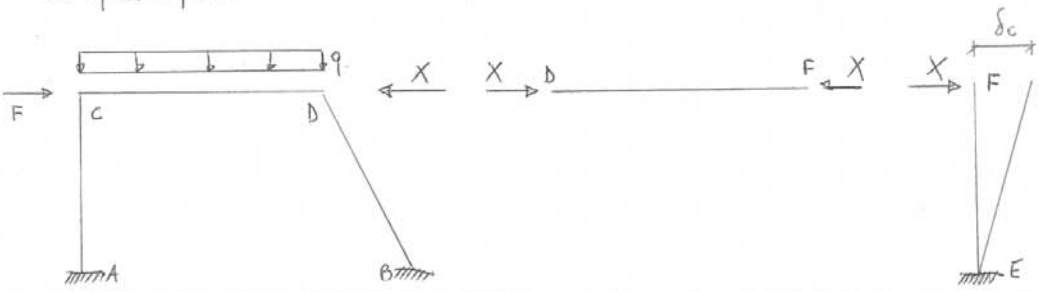
$n_p = 1$ (numero pendoli)

$l = 3t - 2c - n_p$; $l = 1$

La struttura e' ad 1 nodo spostabile. Le incognite sono δ_C, φ_C e φ_D. Costruiamo la deformata cinematica imponendo lo spostamento δ_C al nodo C.

Per l'inestensibilita' del pendolo DF, per effetto dello spostamento δ_C del nodo C anche i nodi D e F trasleranno in orizzontale per una distanza pari a δ_C.

A questo punto sostituiamo il pendolo con la sua reazione X



δ_c può essere visto come lo spostamento in punta provocato dalla forza X sulla mensola EF

$$\delta_c = \frac{X H^3}{3EI_t} \Rightarrow X = \frac{3EI_t}{H^3}\delta_c$$

A questo punto il sistema risolvente sarà dato da:

- equilibrio dei momenti in C
- equilibrio dei momenti in D
- principio del lavoro virtuale applicato al telaio ABCD, con riferimento al sistema di forze $\{M_{AC}, M_{CA}, M_{CD}, M_{DC}, M_{DB}, M_{BD}, F, q, X\}$ per lo spostamento virtuale $\delta'_c = 1$

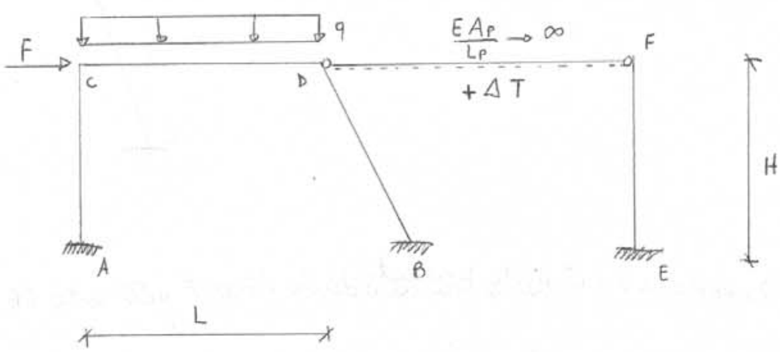
	δ'_c
δ'_{AC}	1
δ'_{CD}	$-1/tg\alpha$
δ'_{BD}	$1/sen\alpha$

Per l'inestensibilità assiale la relazione tra gli spostamenti virtuali δ'_c e δ'_{ij} è uguale a quella tra gli spostamenti reali δ_c e δ_{ij}

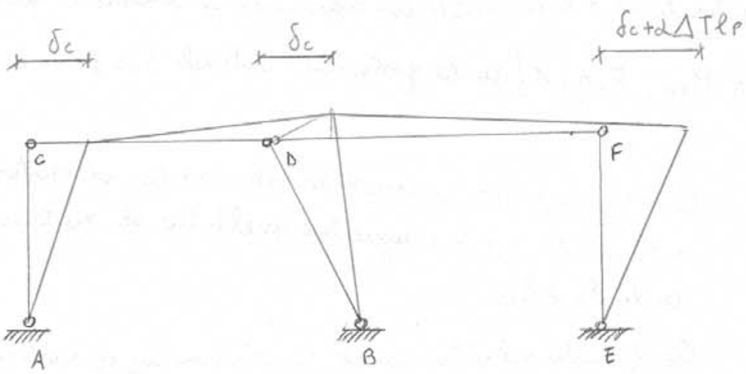
$$\begin{cases} M_{CA} + M_{CD} = 0 \\ M_{DC} + M_{DB} = 0 \\ \dfrac{(M_{AC}+M_{CA})}{H} - \dfrac{(M_{CD}+M_{DC})}{L\,tg\alpha} + \dfrac{M_{BD}+M_{DB}}{H} + F - \dfrac{qL}{2tg\alpha} - \dfrac{3EI_t}{H^3}\delta_c = 0 \end{cases}$$

Esprimendo i momenti nella forma $M_{ij} = W_{ij}\varphi_i + V_{ij}\varphi_j - U_{ij}\delta_{ij} + \mu_{ij}$ è possibile ricavare il valore delle 3 incognite $\varphi_C, \varphi_D, \delta_C$. Successivamente sarà possibile determinare i momenti all'estremità di ogni asta, i tagli dall'equilibrio delle singole aste e gli sforzi normali dall'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale dei nodi C e D

ESERCIZIO 5



Per dire se la struttura e' a nodi fissi o a nodi spostabili e' necessario valutare il grado di labilita' della struttura reticolare associata.



$t = 4$

$c = 5$

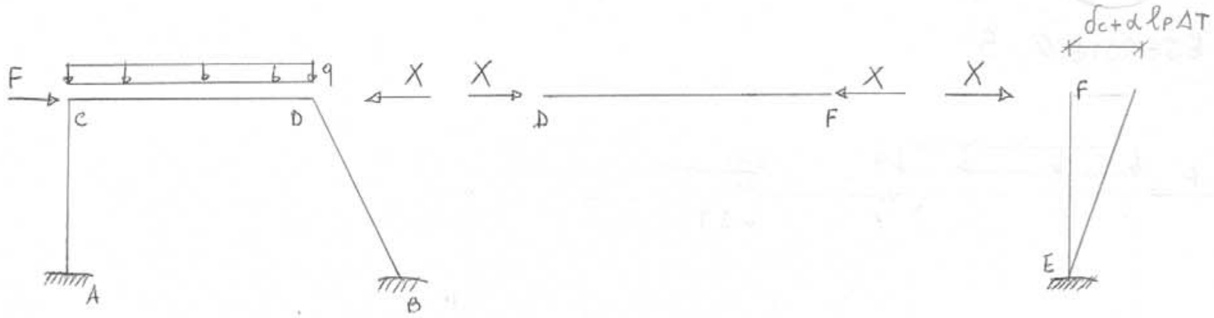
$n_p = 1$ (numero pendoli)

$l = 3t - 2c - n_p$; $l = 1$

La struttura e' ad 1 nodo spostabile. Le incognite sono φ_C, φ_D e δ_C. Costruiamo la deformata cinematica imponendo lo spostamento δ_C al nodo C.

Per effetto dello spostamento δ_C del nodo C, anche il nodo D trasla in orizzontale della quantita' δ_C. Per la presenza della distorsione termica sul pendolo DF, il nodo F traslera' in orizzontale della quantita' $\delta_C + \alpha l_P \Delta T$

A questo punto sostituiamo il pendolo con la sua reazione X



$\delta_c + \alpha l_P \Delta t$ può essere visto come lo spostamento in punta provocato dalla forza X sull'asta EF

$$\delta_c+\alpha l_P\Delta T = \frac{XH^3}{3EI_t} \Rightarrow X = \frac{3EI_t}{H_3}\left(\delta_c+\alpha l_P\Delta T\right)$$

A questo punto il sistema risolvente sarà dato da:

- equilibrio dei momenti in C
- equilibrio dei momenti in D
- principio del lavoro virtuale applicato al telaio ABCD, con riferimento al sistema di forze

$\{M_{CA}, M_{AC}, M_{CD}, M_{DC}, M_{DB}, M_{BD}, F, q, X\}$ per lo spostamento virtuale $\delta'_c=1$

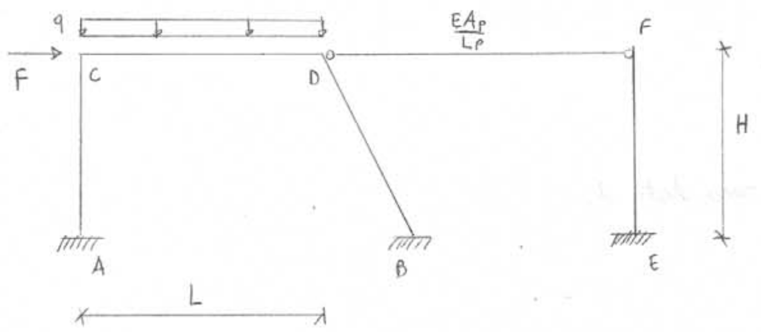
	δ'_c
δ'_{AC}	1
δ'_{CD}	$-1/tg\alpha$
δ'_{BD}	$1/sen\alpha$

Per l'inestensibilità assiale la relazione tra gli spostamenti virtuali δ'_c e δ'_{ij} è uguale a quella tra gli spostamenti reali δ_c e δ_{ij}.

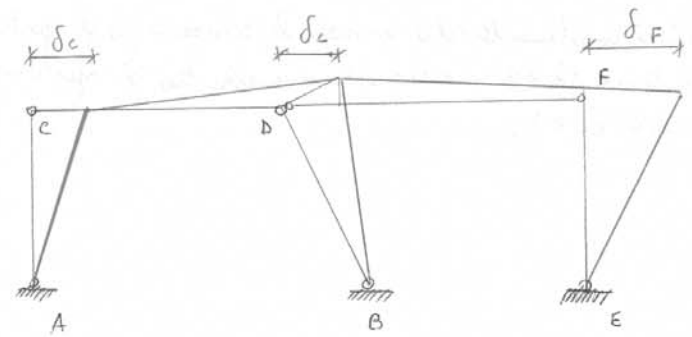
$$\begin{cases} M_{CA}+M_{CD}=0 \\ M_{DC}+M_{DB}=0 \\ \dfrac{M_{AC}+M_{CA}}{H} - \dfrac{M_{CD}+M_{DC}}{L\,tg\alpha} + \dfrac{M_{BD}+M_{DB}}{H} + F - \dfrac{qL}{2tg\alpha} - \dfrac{3EI_t}{H^3}\left(\delta_c+\alpha l_P\Delta T\right)=0 \end{cases}$$

Esprimendo i momenti nella forma $M_{ij}=W_{ij}\varphi_i+V_{ij}\varphi_j-U_{ij}\delta_{ij}+\mu_{ij}$ è possibile ricavare il valore delle 3 incognite φ_c, φ_D, δ_c. Successivamente sarà possibile determinare i momenti all'estremità di ogni asta, i tagli dall'equilibrio delle singole aste e gli sforzi normali dall'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale dei nodi C e D.

ESERCIZIO 6



Per dire se la struttura e' a nodi fissi o a nodi spostabili e' necessario valutare il grado di labilità della struttura reticolare associata.

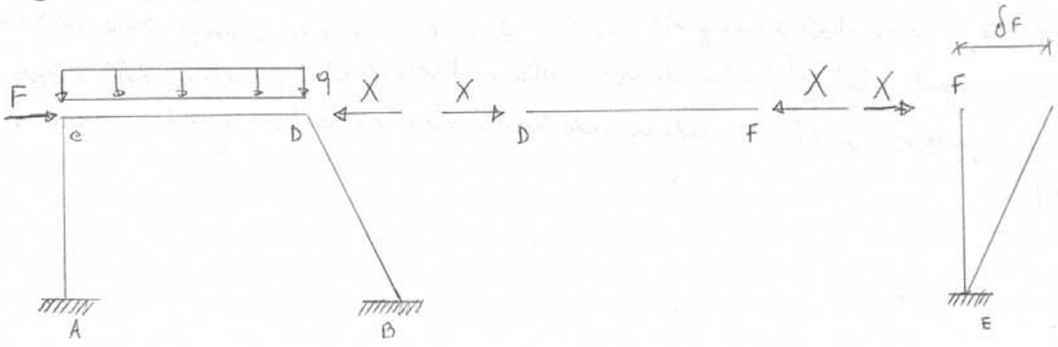


$t=4$

$c=5$

$l=3t-2c;\ l=2$

La struttura e' a 2 nodi spostabili. Le incognite sono φ_C, φ_D, δ_C e δ_F. Costruiamo la deformata cinematica imponendo lo spostamento δ_C al nodo C. Per effetto di tale spostamento il nodo D traslerà in orizzontale della stessa quantità, mentre lo spostamento δ_F del nodo F sarà diverso da δ_C per l'estensibilità del pendolo DF. A questo punto sostituiamo il pendolo con la sua reazione X



δ_F può essere visto come lo spostamento in punta provocato dalla forza X sull'estremo F della mensola EF

$$\delta_F = \frac{X H^3}{3EI_t} \Rightarrow X = \frac{3EI}{H_3}\delta_F$$

A questo punto il sistema risolvente sarà dato da:

- equilibrio dei momenti in C
- equilibrio dei momenti in D
- principio del lavoro virtuale applicato al telaio ABCD, con riferimento al sistema di forze $\{M_{CA}, M_{AC}, M_{CD}, M_{DC}, M_{DB}, M_{BD}, F, q, X\}$ per lo spostamento virtuale $\delta'_C = 1$
- equazione di congruenza del pendolo DF.

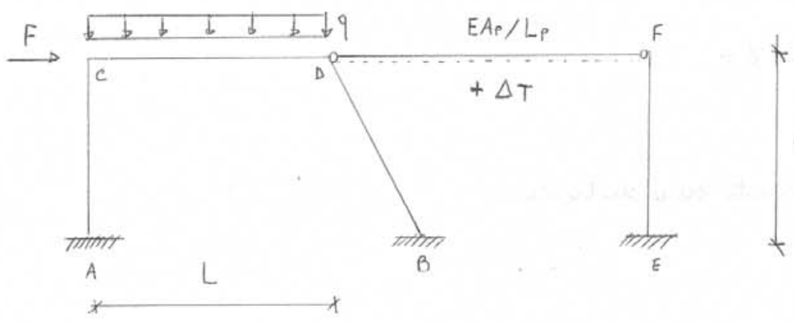
	δ'_C
δ'_{AC}	1
δ'_{CD}	$-1/tg\alpha$
δ'_{BD}	$1/sen\,\alpha$

Per l'inestensibilità assiale la relazione tra gli spostamenti virtuali δ'_C e δ'_{ij} è uguale a quella tra gli spostamenti reali δ_C e δ_{ij}

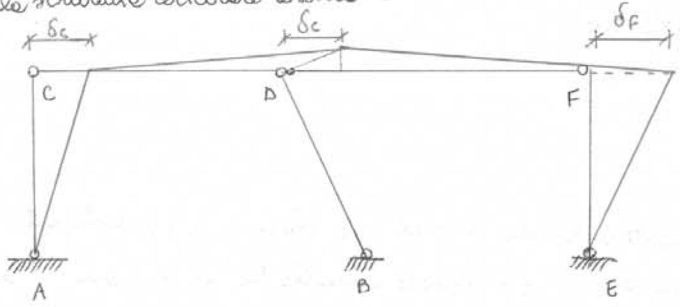
$$\begin{cases} M_{CA} + M_{CD} = 0 \\ M_{DC} + M_{DB} = 0 \\ \dfrac{M_{AC}+M_{CA}}{H} - \dfrac{M_{DC}+M_{CD}}{L\,tg\,\alpha} + \dfrac{M_{DB}+M_{BD}}{H} + F - \dfrac{qL}{2\,tg\alpha} - \dfrac{3EI_t}{H^3}\delta_F = 0 \\ \delta_C - \delta_F = \dfrac{3EI_t}{H^3}\dfrac{\ell_P}{EA_P}\delta_F \quad \text{ottenuta esplicitando la relazione } \delta_C - \delta_F = \dfrac{X\,\ell_P}{EA_P} \end{cases}$$

Esprimendo i momenti nella forma $M_{ij} = W_{ij}\varphi_i + V_{ij}\varphi_j - U_{ij}\delta_{ij} + \mu_{ij}$ è possibile ricavare dal sistema risolvente il valore delle 4 incognite $\varphi_C, \varphi_D, \delta_C, \delta_F$. Successivamente sarà possibile determinare i momenti all'estremità di ogni asta, i tagli dall'equilibrio delle singole aste e gli sforzi normali dall'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale dei nodi C e D.

ESERCIZIO 7



Per dire se la struttura e' a nodi fissi o a nodi spostabili e' necessario valutare il grado di labilità della struttura reticolare associata.

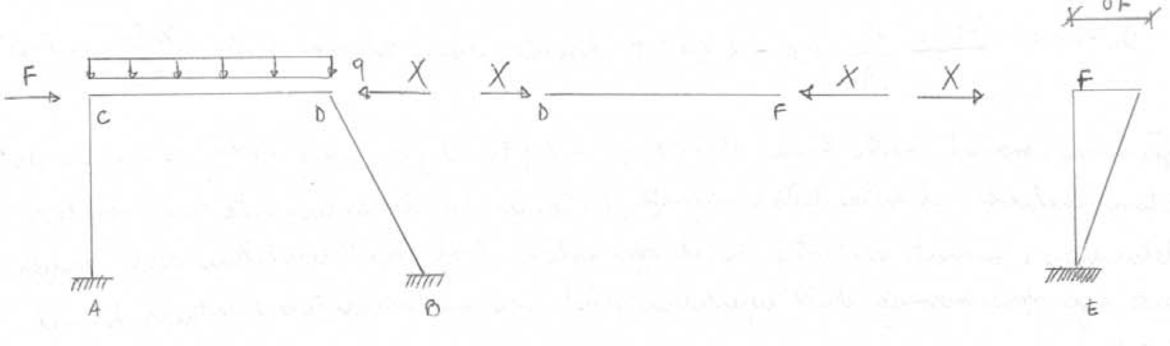


$t = 4$

$c = 5$

$l = 3t - 2c;\ l = 2$

La struttura e' a 2 nodi spostabili. Le incognite sono φ_C, φ_D, δ_C e δ_F. Costruiamo la deformata cinematica imponendo lo spostamento δ_C al nodo C. Per effetto di tale spostamento il nodo D traslerà in orizzontale della stessa quantità, mentre lo spostamento δ_F del nodo F sarà diverso da δ_C per la presenza del pendolo estensibile DF. A questo punto sostituiamo il pendolo con la sua reazione X



δ_F può essere visto come lo spostamento in punta provocato dalla forza X sull'estremo F della mensola EF

$$\delta_F = \frac{XH^3}{3EI_t} \Rightarrow X = \frac{3EI_t}{H^3}\delta_F$$

A questo punto il sistema risolvente sarà dato da:

- equilibrio dei momenti in C
- equilibrio dei momenti in D
- principio del lavoro virtuale applicato al telaio ABCD, con riferimento al sistema di forze $\{M_{CA}, M_{AC}, M_{CD}, M_{DC}, M_{DB}, M_{BD}, F, q, X\}$ per lo spostamento virtuale $\delta'_c = 1$
- equazione di congruenza del pendolo DF

	δ'_c
δ'_{AC}	1
δ'_{CD}	$-1/tg\alpha$
δ'_{BD}	$1/sen\alpha$

Per l'inestensibilità assiale la relazione tra gli spostamenti virtuali δ'_c e δ'_{ij} e' uguale a quella tra gli spostamenti reali δ_c e δ_{ij}

$$\begin{cases} M_{CA}+M_{CD}=0 \\ M_{DC}+M_{DB}=0 \\ \dfrac{M_{AC}+M_{CA}}{H} - \dfrac{M_{DC}+M_{CD}}{L\,tg\alpha} + \dfrac{M_{DB}+M_{BD}}{H} + F - \dfrac{qL}{2tg\alpha} - \dfrac{3EI_t}{H^3}\delta_F = 0 \\ \delta_c - \delta_F = \dfrac{3EI_t}{H^3}\dfrac{l_P}{EA_P}\delta_F - \alpha l_P \Delta T \quad \text{ottenuta dalla relazione } \delta_c-\delta_F = \dfrac{X l_P}{EA_P} - \alpha l_P \Delta T \end{cases}$$

Esprimendo i momenti nella forma $M_{ij} = W_{ij}\varphi_i + V_{ij}\varphi_j - U_{ij}\delta_{ij} + \mu_{ij}$ e' possibile ricavare dal sistema risolvente il valore delle 4 incognite $\varphi_C, \varphi_D, \delta_C, \delta_F$. Successivamente sarà possibile determinare i momenti all'estremità di ogni asta, i tagli dall'equilibrio delle singole aste e gli sforzi normali dall'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale dei nodi C e D.