Verifica di una sezione circolare pressoinflessa

Si effettua la verifica allo stato limite ultimo per tensioni normali di una sezione circolare.

- Dati geometrici

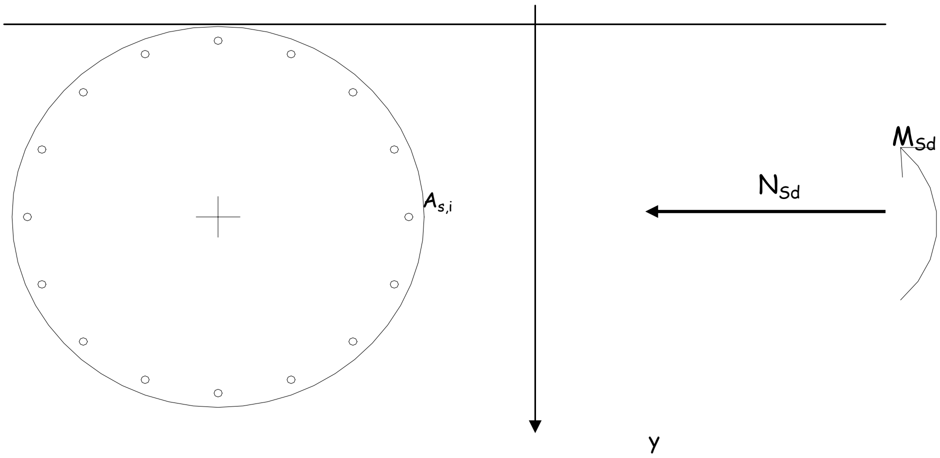
D=	500	mm	d'=	30	mm
$A_{s,i}$=	201	mm^2			

- Dati meccanici

f_{sk}=	435.0	MPa	f_{sd}=	378.3	MPa
R_{ck}=	25.0	MPa	f'_{cd}=	10.38	MPa

- Caratteristiche della sollecitazione

N_{Sd}=	785.4	kN	M_{Sd}=	235.6	kNm



1. Ricerca dell'asse neutro allo S.L.U.

Si attuerà un procedimento iterativo per la soluzione dell'equazione di equilibrio alla traslazione lungo l'asse dell'elemento

$$F(y_c) = N_c(y_c) + N_s(y_c) - N_{Sd} = 0$$

in cui

$$N_s(y_c) = \sum_{i=1}^{n_s} A_{s,i} \cdot \sigma_{s,i}(y_c)$$

Il procedimento iterativo sarà condotto con l'ausilio del Metodo della Tangente che, a partire da due valori di y_c in cui $F(y_c)$ assume segno diverso, procede in con successive approssimazioni lineari a restringere l'intervallo tra tali valori di y_c.

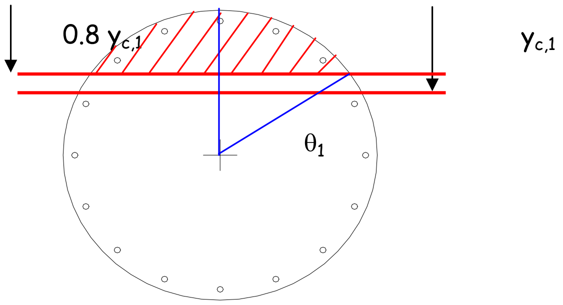
Per questa ragione bisogna dapprima trovare un intervallo iniziale di valori di y_c in cui la funzione $F(y_c)$ crescente con y_c, assuma valori di segno diverso.

Il primo valore di tentativo che si considera è

$y_{c,1}=y_{2,3}$= 121.85 mm

Il contributo del calcestruzzo, nell'ipotesi di stress-block, si può facilmente ottenere applicando la formula seguente:

$$N_c(y_c) = 2 \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot [\vartheta(y_c) - \sin\vartheta(y_c) \cdot \cos\vartheta(y_c)] \cdot f'_{cd}$$



in cui

$$\vartheta(y_c) = \arccos\frac{D/2 - 0.8y_c}{D/2} =$$

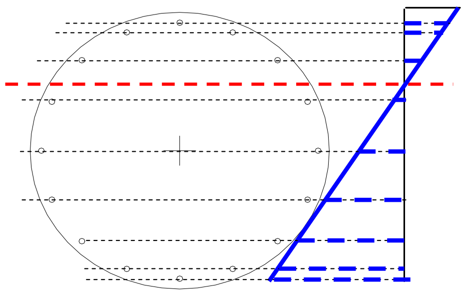
$\theta(y_{c,1})$= 0.915 = 52°.41

$N_c(y_{c,1})$= 279640.93 N

Quanto alle tensione nelle armature, bisogna valutarne la deformazione per l'assegnata posizione dell'asse neuto y_c; in questo modo è possibile risalire alle corrispondenti tensioni ed alle loro risultanti.

$y_{c,1}$= 121.85 mm

$\theta_{s,i}$ [°]	$\theta_{s,i}$ [rad]	$y_{s,i}$ [mm]	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$ [MPa]	$A_{s,i}$ [mm^2]	$A_{s,i}\sigma_{s,i}$ [N]
0.0	0.000	30.0	0.00264	378.26	201	76030
22.5	0.393	46.7	0.00216	378.26	402	152061
45.0	0.785	94.4	0.00079	165.37	402	66478
67.5	1.178	165.8	-0.00126	-265.15	402	-106590
90.0	1.571	250.0	-0.00368	-378.26	402	-152061
112.5	1.963	334.2	-0.00610	-378.26	402	-152061
135.0	2.356	405.6	-0.00815	-378.26	402	-152061
157.5	2.749	453.3	-0.00952	-378.26	402	-152061
180.0	3.142	470.0	-0.01000	-378.26	201	-76030



$N_s(y_{c,1})$= -496295 N

In definitiva

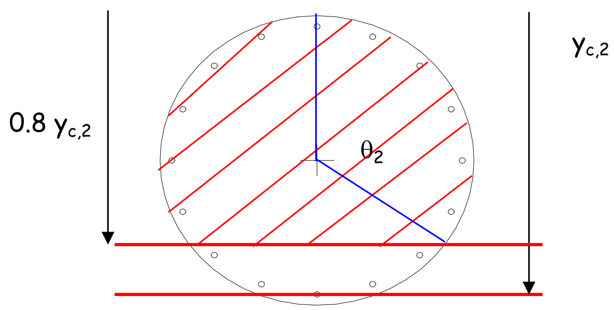
$F(y_{c,1})$= -1002029.3 N

Il secondo valore di tentativo viene assunto come segue:

$y_{c,2}$=D-d'= 470.00 mm

Il contributo del calcestruzzo, nell'ipotesi di stress-block, si può facilmente ottenere

$$N_c(y_c) = 2 \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot [\vartheta(y_c) - \sin\vartheta(y_c) \cdot \cos\vartheta(y_c)] \cdot f'_{cd}$$



in cui

$$\vartheta(y_c) = \arccos\frac{D/2 - 0.8y_c}{D/2} =$$

$\theta(y_{c,2})$= 2.099 = 120°.26

$N_c(y_{c,2})$= 1643352.5 N

Quanto alle tensione nelle armature, bisogna valutarne la deformazione per

$y_{c,2}$= 470 mm

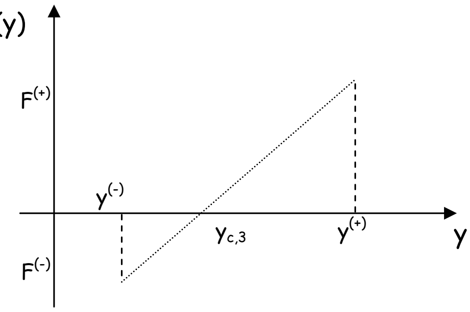
$\theta_{s,i}$	$\theta_{s,i}$	$y_{s,i}$	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$	$A_{s,i}$	$A_{s,i}\sigma_{s,i}$
[°]	[rad]	[mm]		[MPa]	[mm^2]	[N]
0.0	0.000	30.0	0.00328	378.26	201	76030
22.5	0.393	46.7	0.00315	378.26	402	152061
45.0	0.785	94.4	0.00280	378.26	402	152061
67.5	1.178	165.8	0.00227	378.26	402	152061
90.0	1.571	250.0	0.00164	344.04	402	138305
112.5	1.963	334.2	0.00101	212.38	402	85378
135.0	2.356	405.6	0.00048	100.77	402	40509
157.5	2.749	453.3	0.00012	26.19	402	10528
180.0	3.142	470.0	0.00000	0.00	201	0

$N_s(y_{c,2})$= 806933 N

In definitiva

$F(y_{c,2})$= 1664910.2 N

A questo punto, disponendo di due valori della y_c in corrispondenza dei quali la F assume segni diversi si può attuare il metodo della tangente che consiste nella ricerca della soluzione dell'equazione F(yc)=0 per successive approssimazioni lineari.



3ª Iterazione

Posto

$y^{(-)}$= 121.85 $F^{(-)}$= -1002029.3

$y^{(+)}$= 470.00 $F^{(+)}$= 1664910.2

si applica in maniera iterativa la seguente relazione per la stima della soluzione come interpolazione lineare:

$$y_{c,3} = y^{(-)} - \frac{F^{(-)}}{F^{(+)} - F^{(-)}} \cdot \left(y^{(+)} - y^{(-)}\right) = \qquad 252.66 \text{ mm}$$

$\theta(y_{c,3})$= 1.378 = 78°.96

$N_c(y_{c,3})$= 771749.13 N

Quanto alle tensione nelle armature, bisogna valutarne la deformazione per

$y_{c,3}$= 252.66 mm

$\theta_{s,i}$	$\theta_{s,i}$	$y_{s,i}$	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$	$A_{s,i}$	$A_{s,i}\sigma_{s,i}$
[°]	[rad]	[mm]		[MPa]	[mm^2]	[N]
0.0	0.000	30.0	0.00308	378.26	201	76030
22.5	0.393	46.7	0.00285	378.26	402	152061
45.0	0.785	94.4	0.00219	378.26	402	152061
67.5	1.178	165.8	0.00120	252.65	402	101565
90.0	1.571	250.0	0.00004	7.74	402	3110
112.5	1.963	334.2	-0.00113	-237.18	402	-95346
135.0	2.356	405.6	-0.00212	-378.26	402	-152061
157.5	2.749	453.3	-0.00278	-378.26	402	-152061
180.0	3.142	470.0	-0.00301	-378.26	201	-76030

$N_s(y_{c,3})=$ 9328.51 N

In definitiva

$F(y_{c,3})=$ -4297.4 N

4ª Iterazione

Posto

$y^{(-)}=$ 252.66 $F^{(-)}=$ -4297.4

$y^{(+)}=$ 470.00 $F^{(+)}=$ 1664910.2

si applica in maniera iterativa la seguente relazione per la stima della soluzione come

$$y_{c,4} = y^{(-)} - \frac{F^{(-)}}{F^{(+)} - F^{(-)}} \cdot \left(y^{(+)} - y^{(-)}\right) = \quad 253.22 \text{ mm}$$

$\theta(y_{c,4})=$ 1.380 = 79°.06

$N_c(y_{c,4})=$ 774028.66 N

Quanto alle tensione nelle armature, bisogna valutarne la deformazione per

$y_{c,4}=$ 253.22 mm

$\theta_{s,i}$ [°]	$\theta_{s,i}$ [rad]	$y_{s,i}$ [mm]	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$ [MPa]	$A_{s,i}$ [mm^2]	$A_{s,i}\sigma_{s,i}$ [N]
0.0	0.000	30.0	0.00309	378.26	201	76030
22.5	0.393	46.7	0.00285	378.26	402	152061
45.0	0.785	94.4	0.00219	378.26	402	152061
67.5	1.178	165.8	0.00121	253.72	402	101994
90.0	1.571	250.0	0.00004	9.34	402	3756
112.5	1.963	334.2	-0.00112	-235.03	402	-94483
135.0	2.356	405.6	-0.00211	-378.26	402	-152061
157.5	2.749	453.3	-0.00276	-378.26	402	-152061
180.0	3.142	470.0	-0.00300	-378.26	201	-76030

$N_s(y_{c,4})=$ 11266.6 N

In definitiva

$F(y_{c,4})=$ -79.7 N

5ª Iterazione

Posto

$y^{(-)}=$ 253.22 $F^{(-)}=$ -79.7

$y^{(+)}=$ 470.00 $F^{(+)}=$ 1664910.2

si applica in maniera iterativa la seguente relazione per la stima della soluzione come

$$y_{c,5} = y^{(-)} - \frac{F^{(-)}}{F^{(+)} - F^{(-)}} \cdot \left(y^{(+)} - y^{(-)}\right) = \quad 253.23 \text{ mm}$$

$\theta(y_{c,5})=$ 1.380 = 79°.07

$N_c(y_{c,5})$= 774070.96 N

Quanto alle tensione nelle armature, bisogna valutarne la deformazione per

$y_{c,5}$= 253.23 mm

$\theta_{s,i}$	$\theta_{s,i}$	$y_{s,i}$	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$	$A_{s,i}$	$A_{s,i}\sigma_{s,i}$
[°]	[rad]	[mm]		[MPa]	[mm^2]	[N]
0.0	0.000	30.0	0.00309	378.26	201	76030
22.5	0.393	46.7	0.00285	378.26	402	152061
45.0	0.785	94.4	0.00219	378.26	402	152061
67.5	1.178	165.8	0.00121	253.74	402	102002
90.0	1.571	250.0	0.00004	9.37	402	3767
112.5	1.963	334.2	-0.00112	-234.99	402	-94467
135.0	2.356	405.6	-0.00211	-378.26	402	-152061
157.5	2.749	453.3	-0.00276	-378.26	402	-152061
180.0	3.142	470.0	-0.00300	-378.26	201	-76030

$N_s(y_{c,5})$= 11302.5 N

In definitiva

$F(y_{c,5})$= -1.6 N

Si può ritenere di aver raggiunto la convergenza per un valore:

y_c= 253.23 mm

2. Calcolo del momento Ultimo

Il momento ultimo della sezione può essere ottenuto calcolando il momento risultante delle tensioni di trazione e compressione che si hanno nell'acciaio e nel calcestruzzo:

$$M_{Rd} = M_{Rd,c} + M_{Rd,s}$$

Entrambi i momenti devono essere valutati rispetto al baricentro geometrico della sezione e risulta:

$$M_{Rd,c} = N_c(y_c) \cdot y_{c,G}$$

essendo $y_{c,G}$ la distanza tra i baricentro della zona compressa ed il centro della sezione:

$$y_{c,G} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin^3 \vartheta}{\vartheta - \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta} \cdot R = \quad 132.16 \quad \text{mm}$$

$M_{Rd,c}$= 102291989 Nmm

Quanto al contributo delle armature, si ha:

$$M_{Rds} = \sum_{i=1}^{n} A_{s,i} \cdot \sigma_{s,i} \cdot \left(\frac{D}{2} - y_{s,i}\right)$$

Il contributo dell'armatura al momeno ultimo può essere calcolato completando la tabella riportata sopra con i momenti che corrispondono ad ognuno dei livelli di armatura.

y_c= 253.22 mm

$\theta_{s,i}$	$\theta_{s,i}$	$y_{s,i}$	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$	$A_{s,i}$	$A_{s,i}\sigma_{s,i}$	$A_{s,i}\sigma_{s,i}(h/2-y_{s,i})$
[°]	[rad]	[mm]		[MPa]	[mm^2]	[N]	[Nmm]
0.0	0.000	30.0	0.00309	378.26	201	76030	16726696
22.5	0.393	46.7	0.00285	378.26	402	152061	30906904
45.0	0.785	94.4	0.00219	378.26	402	152061	23655120
67.5	1.178	165.8	0.00121	253.72	402	101994	8586887.1
90.0	1.571	250.0	0.00004	9.34	402	3756	0
112.5	1.963	334.2	-0.00112	-235.03	402	-94483	7954526.8
135.0	2.356	405.6	-0.00211	-378.26	402	-152061	23655120
157.5	2.749	453.3	-0.00276	-378.26	402	-152061	30906904
180.0	3.142	470.0	-0.00300	-378.26	201	-76030	16726696

$M_{Rd,s}$= 159118852 Nmm

In definitiva:

$$M_{Rd}= 261.41 \text{ kNm}$$

e la sezione risulta verificata alo stato limite per tensioni normali poiché risulta:

$$M_{Sd} < M_{Rd}$$