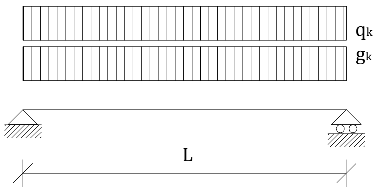
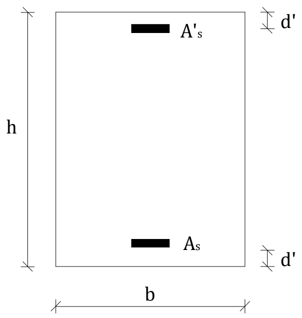
Università degli Studi di Salerno – Facoltà di Ingegneria
Corso di Tecnica delle Costruzioni I – Nuovo Ordinamento
1° Prova Intercorso - Anno accademico 2008-2009
Prova scritta - 09/01/2009

Esercizio n. 1 (Punti 8)

Per la trave rappresentata in figura si esegua, secondo il Metodo alle Tensioni Ammissibili, il progetto dell'altezza della sezione (h) e delle armature a flessione (As' ed As) e taglio (staffe):





Si assumano i seguenti valori numerici:

Altri Parametri		
L = 500 + $N/10$ [cm]	**g_k** = 14 + C – N [kN/m]	***N.B.: con i simboli C e N si intende***
b = 30 + C [cm]	**q_k** = 20 – $N/2$ [kN/m]	***il numero di lettere che***
R_{ck} = 25 MPa	**Acciaio** = B450C	***compongono cognome e nome.***

Per la sezione progettata, sempre secondo il Metodo alle Tensioni Ammissibili, si esegua la verifica a flessione semplice.

Esercizio n. 2 (Punti 6)

Per la sezione progettata e verificata nell'esercizio precedente si effettui la verifica a taglio secondo il Metodo Semiprobabilistico agli Stati Limite e, se necessario, si dimensioni un'opportuna armatura trasversale.

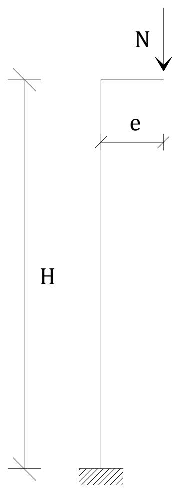
Esercizio n. 3 (Punti 8)

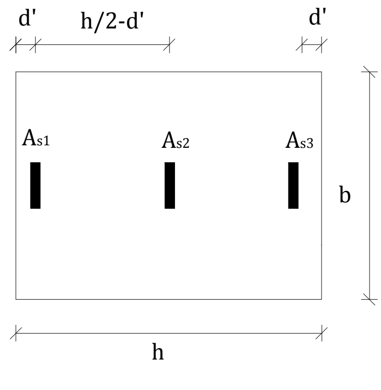
Con riferimento alla mensola rappresentata nella figura sottostante avente sezione rettangolare, si effettui, secondo il Metodo Semiprobabilistico agli Stati Limite, la verifica a pressoflessione retta considerando che l'altezza della mensola sia pari a H = 5,0 + C – N [m].

b = 30 cm;
h= 60 + C - N [cm];
d' = 3 cm;
e = 10 + N + C [cm]
A_{s1} = 10,05 cm^2;
A_{s2} = 4,02 cm^2;
A_{s3} = 10,05 cm^2;
N = 200 + C – N [kN]

Calcestruzzo
R_{ck}= 25.0 MPa

Acciaio
B450C

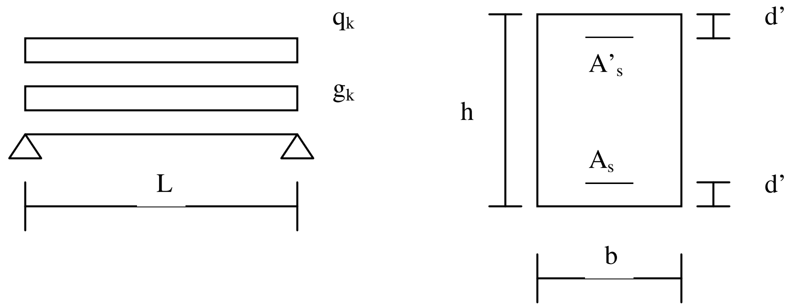




Esercizio n. 4 (Punti 8)
Per lo schema riportato all'esercizio precedente si determini, con riferimento agli Stati Limite di Esercizio, il momento di prima fessurazione M_{fess}. Per le caratteristiche dei materiali si faccia sempre riferimento all'esercizio precedente.

Esercizio n. 1

I dati di partenza dell'esercizio sono i seguenti:



L = 500 +N/10 [cm]
b = 30+C [cm]
R_{ck}= 25 MPa
g_k =14 + C –N [kN/m]
q_k = 20 – N/2 [kN/m]
Acciaio = B450C

Scegliendo, ad esempio, N=6 e C=7 si ottengono i seguenti valori:

L = 500 cm
b = 37 cm
R_{ck}= 25 MPa
g_k =15 kN/m
q_k = 17 kN/m
Acciaio = B450C

Le tensioni ammissibili dei materiali sono le seguenti:

Calcestruzzo R_{ck}= 25 MPa $\overline{\sigma_c} = 6 + \frac{R_{ck} - 15}{4} = 8.5 N / mm^2$

Acciaio B450C $\overline{\sigma_S} = 260 N / mm^2$

Il carico totale agente sulla trave è:

$$q_{tot} = g_k + q_k = 32 kN / m$$

Per lo schema di trave appoggiata-appoggiata, il momento massimo è quello agente nella sezione di mezzeria e vale:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} = 100,24\, kNm$$

Per il **progetto tabellare** si fissa:

$d' / d = 0,05$

$\rho = A'_s / A_s = 0,25$

Considerando tali valori e facendo riferimento alle tensioni ammissibili dei materiali suddette, si entra in tabella e si legge in corrispondenza di tali valori:

$r' = 0,267$

L'altezza utile della sezione si ricava mediante la relazione seguente:

$$d = r'\sqrt{\frac{M}{b}} = 0,267\sqrt{\frac{100,24 \cdot 10^4}{37}} = 43,95cm$$

Ponendo d = 45 cm si ottiene d'==0,05*d=2,25 e scegliendo d'=3 cm l'altezza h della sezione sarà:

h=d+d'=48 cm
(trattandosi di un esercizio teorico, non si provvede ad un ulteriore arrotondamento)

La tensione di lavoro del calcestruzzo sarà inferiore a tensione di progetto, in quanto è stata scelta un'altezza della sezione superiore a quella di progetto; si ha infatti:

$$r' = \frac{d}{\sqrt{\frac{M}{b}}} = \frac{45}{\sqrt{\frac{100,24 \cdot 10^4}{37}}} = 0.273$$

A cui corrisponde una tensione di lavoro $\sigma_c = 8.25N/mm^2$ ed un valore di $\zeta' = 0,898$ (cfr. tabella - Volume 1A).

Per l'armatura si ha:

$$A_s = \frac{1}{\sigma_s r' \zeta'}\sqrt{Mb} = \frac{1}{2600 \cdot 0,273 \cdot 0,898}\sqrt{100,24 \cdot 10^4 \cdot 37} = 9,55cm^2$$

$$A'_s = 0,25 \cdot A_s = 2,39cm^2$$

Si considerano, quindi, $4\Phi 18 = 10,18cm^2$ per l'armatura in zona tesa e $2\Phi 14 = 3,09cm^2$
I minimi normativi prescrivono:

$$A_s \geq 0,15\% bh \quad (1)$$

nel caso

$$10,18cm^2 > 0,15\%(37) \cdot (48) = 2,66cm^2$$

che rispetta la prescrizione (1).

Si passa, quindi, alla **verifica analitica a flessione** della sezione.
Tale verifica richiede preventivamente il calcolo dell'asse neutro mediante la relazione:

$S_n = 0$

da cui, omettendo i passaggi, deriva:

$$y_c = -\frac{n}{b}(A'_s + A_s) + \sqrt{\frac{n^2}{b^2}(A'_S + A_s)^2 + \frac{2n}{b}(A'_s d' + A_s d)}$$

Nel caso in esame si ha:

$$y_c = -\frac{15}{37}(3,09 + 10,18) + \sqrt{\frac{15^2}{37^2}(3,09 + 10,18)^2 + \frac{2 \cdot 15}{37}(3,09 \cdot 3 + 10,18 \cdot 45)} = 14,82cm$$

Determinato il valore di y_c si calcola I_n mediante la seguente espressione:

$$I_n = \frac{by_c^3}{3} + nA'_s\,(y_c - d')^2 + nA_s(d - y_c)^2$$

e dunque:

$$I_n = \frac{37 \cdot 14{,}82^3}{3} + 15 \cdot 3{,}09 \cdot (14{,}82 - 3)^2 + 15 \cdot 10{,}18 \cdot (45 - 14{,}82)^2 = 185704 cm^4$$

Le tensioni nel calcestruzzo e nelle armature sono:

$$\sigma_c = \frac{M}{I_n} y_c = \frac{100{,}24 \cdot 10^6}{185704 \cdot 10^4} \cdot 148{,}2 = 7{,}99 N/mm^2 < \overline{\sigma_c}$$

$$\sigma_s = n\frac{M}{I_n}(d - y_c) = 15\frac{100{,}24 \cdot 10^6}{185704 \cdot 10^4} \cdot (450 - 148{,}2) = 244 N/mm^2 < \overline{\sigma_s}$$

$$\sigma'_s = n\frac{M}{I_n}(y_c - d') = 15\frac{100{,}24 \cdot 10^6}{185704 \cdot 10^4} \cdot (148{,}2 - 30) = 95{,}7 N/mm^2 < \overline{\sigma_s}$$

Tali tensioni sono inferiori alle rispettive tensioni ammissibili, pertanto la verifica a flessione è soddisfatta.

Infine l'esercizio richiede il progetto delle armature a taglio (staffe).
Si parte dal calcolo del taglio massimo che, per lo schema assegnato, vale:

$$\mathrm{T_{max}} = \frac{\mathrm{ql}}{2} = \frac{32 \cdot 5{,}00}{2} = 80{,}0\ \mathrm{kN}$$

Ottenuto il valore del taglio massimo, si passa al calcolo della tensione tangenziale massima $\tau_{\max}$ utilizzando la formula approssimata:

$$\tau_{\mathrm{max}} = \frac{\mathrm{T_{max}}}{0{,}9\mathrm{bd}} = \frac{80{,}0 \cdot 10^3}{0{,}9 \cdot 370 \cdot 450} = 0{,}52\ \mathrm{N/mm^2}$$

Quando il valore di $\tau_{\max}$ è compreso fra τ_{c0} e τ_{c1}, ovvero: $\tau_{c0} < \tau_{\max} < \tau_{c1}$ è necessario progettare un'idonea armatura a taglio.
Nel caso:

$$\tau_{c0} = 0{,}4 + \frac{R_{ck} - 15}{75} = 0{,}53 N/mm^2$$

$$\tau_{c1} = 1{,}4 + \frac{R_{ck} - 15}{35} = 1{,}69 N/mm^2$$

Poiché $\tau_{\max} < \tau_{c0}$ è sufficiente disporre i minimi regolamentari di armatura a taglio.

Per le staffe la normativa fissa:

$n_{st} > 3$ *per metro* ;

$A_{st} \geq 0{,}10b(1 + 0{,}15d/b)cm^2/m \;\Rightarrow\; A_{st,\min} \geq 0{,}10 \cdot 37(1 + 0{,}15 \cdot 45/37)cm^2/m = 4{,}38cm^2/m$

$p_{st} \leq 0{,}8d \;\Rightarrow\; p_{st,\min} = 0{,}8 \cdot 45 = 36cm$

$p_{st} \leq 12\Phi_l \;\Rightarrow\; p_{st,\min} = 12 \cdot \Phi_{14} = 16{,}8cm$

In definitiva, la disposizione di staffe ϕ 8 al passo di 15 cm (1stϕ8/15') assicura il rispetto di tutte le indicazioni normative indicate sopra.

Esercizio n. 2

La trave dell' esercizio precedente ha le seguenti caratteristiche:

- sezione rettangolare di base b_w = 37 cm ed altezza h = 48cm;
- armatura inferiore $A_S = 4\,\Phi\,18$;
- copri ferro d' = 3 cm;
- luce L = 5,00 m

I carichi agenti sono:

- g_k =15,0 kN/m
- q_k = 17,0 kN/m

I materiali sono:

- calcestruzzo R_{ck} 25MPa
- acciaio B450C

Prima di eseguire la verifica secondo il Metodo Semiprobabilistico agli Stati Limite, si ha che per i materiali utilizzati le tensioni valgono:

$$f_{ck} = 0,83 R_{ck} \approx 20 N/mm^2$$

$$f_{cd} = \frac{0,85 f_{ck}}{1,5} = 11,33 N/mm^2$$

$$f_{sd} = \frac{f_{sk}}{\gamma_s} = \frac{450}{1,15} = 391,3 N/mm^2$$

Il carico agente sulla vale:

$$q_d = \gamma_g g_k + \gamma_q q_k = 1,3 \cdot 15 + 1,5 \cdot 17 = 45 kN/m$$

Il taglio massimo, per lo schema assegnato di trave, vale:

$$V_{Sd} = \frac{q_d l}{2} = \frac{45 \cdot 5,00}{2} = 112,5 \text{ kN}$$

Si calcola innanzitutto $V_{Rd,c}$ mediante l'espressione seguente:

$$V_{Rd,c} = \left[\frac{0,18}{\gamma_c} \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,15 \sigma_{cp} \right] \cdot b_w \cdot d$$

Nell'ambito di tale espressione va definito il parametro :

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w d} = \frac{1018}{370 \cdot 450} = 0,00611$$

inoltre: $\sigma_c = 0$

$$V_{Rd,c} = \left[\frac{0{,}18}{1{,}5} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200}{450}} \right) \cdot (100 \cdot 0{,}00611 \cdot 20)^{1/3} \right] \cdot 370 \cdot 450 = 76{,}743\text{kN}$$

Poiché risulta $\mathrm{V_{Sd}} = 112{,}5$ kN $> V_{Rd,c} = 76{,}743kN$, va progettata un'idonea armatura a taglio.
Per il progetto dell'armatura occorre verificare in quale intervallo è compreso il taglio sollecitante V_{Sd}.

Si determinano, quindi, gli estremi degli intervalli $(V_{Rd,c}, V_{Rd,A})$ e $(V_{Rd,A}, V_{Rd,B})$definendo preliminarmente il parametro:

$$\nu = 0{,}7 \cdot (1 - \frac{f_{ck}}{250}) = 0{,}7 \cdot (1 - \frac{20}{250}) = 0{,}644$$

quindi:

$$V_{RdA} = \frac{\nu \cdot f_{cd}}{\cot \beta_{\min} + \tan \beta_{\min}} \cdot b_w \cdot d = \frac{0{,}644 \cdot 11{,}33}{2{,}5 + 0{,}4} \cdot 370 \cdot 450 = 418{,}921kN$$

$$V_{RdB} = \frac{\nu \cdot f_{cd}}{\cot \beta_{\max} + \tan \beta_{\max}} \cdot b_w \cdot d = \frac{0{,}644 \cdot 11{,}33}{1+1} \cdot 370 \cdot 450 = 607{,}434kN$$

Risulta $V_{Sd} = 112{,}635kN < V_{RdA} = 418{,}921kN$, quindi l'armatura a taglio va progettata assumendo $\cot \beta = 2{,}5$.
Poiché:

$$V_{Sd} = n_{st} \cdot \omega_{st} \cdot n_b \cdot f_{swd} \cdot \cot \beta = \frac{0{,}9d}{s} \cdot \omega_{st} \cdot n_b \cdot f_{swd} \cdot 2{,}5$$

il passo delle staffe, scegliendo staffe Φ 8 a due bracci, sarà:

$$\mathrm{s} = \frac{0{,}9\mathrm{d}}{\mathrm{V_{Sd}}} \cdot \omega_{\mathrm{st}} \cdot \mathrm{n_b} \cdot \mathrm{f_{swd}} \cdot 2{,}5 = \frac{0{,}9 \cdot 450 \cdot 50{,}0 \cdot 2 \cdot 391{,}3 \cdot 2{,}5}{112635} = 352{,}6 \text{ mm}$$

La percentuale geometrica dell'armatura risulta:

$$\rho_{\mathrm{w}} = \frac{2 \cdot 50}{352{,}6 \cdot 370} = 0{,}0008$$

I minimi regolamentari sono:

1. $\rho_{w,\min} = 0{,}08 \cdot \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{sk}} = 0{,}08 \frac{\sqrt{20}}{450} = 0{,}0008$
2. $s_{l,\max} = 0{,}75 \cdot \frac{450}{1 + \cot \alpha} = 337{,}5mm$
3. $s_{l,\max} = 0{,}75 \cdot \frac{450}{1 + \cot \alpha} = 337{,}5mm$

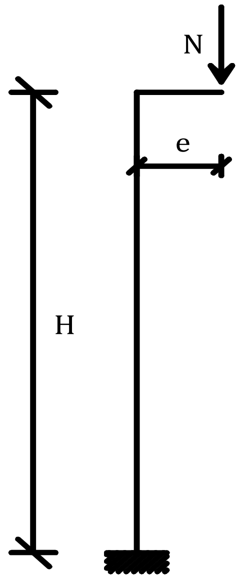
In definitiva, le staffe disposte secondo quanto visto nell'esercizio precedente consentono di soddisfare anche una verifica condotta allo SLU per taglio.

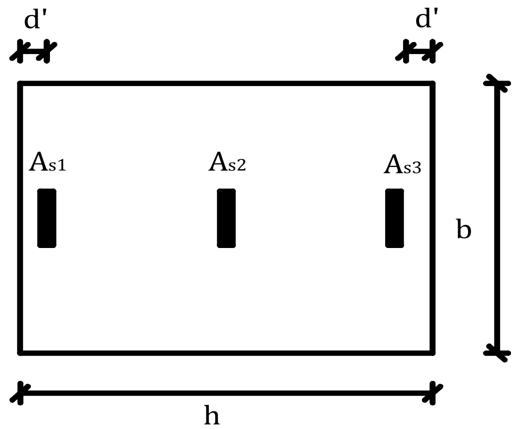
N.B.: le relazioni adottate sopra per V_{Rcd} e V_{Rsd} sono coerenti con quelle riportate nel libro di testo (cfr. Faella – Vol.1B), redatto in linea con la bozza del luglio 2007 della NTC. Nella versione finale *della normativa (emanata con D.M. 14/01/2008) le relazioni risultano lievemente cambiate: si lascia al lettore la risoluzione del medesimo esercizio con quelle formule riportate al punto 4.1.2.1.3 della citata normativa.*

Esercizio n. 3 (Punti 8)

Con riferimento alla mensola rappresentata nella figura sottostante avente sezione rettangolare, si effettui, secondo il Metodo Semiprobabilistico agli Stati Limite, la verifica a pressoflessione retta considerando che l'altezza della mensola sia pari a H = 5,3 m.

b =	25	cm
h =	45	cm
d' =	3	cm
e =	21	cm
A_{s1} =	10,05	cm^2
A_{s2} =	4,02	cm^2
A_{s3} =	10,05	cm^2
N =	200	kN
R_{ck} =	25	MPa
Acciaio	B450C	





1. Caratteristiche dei materiali

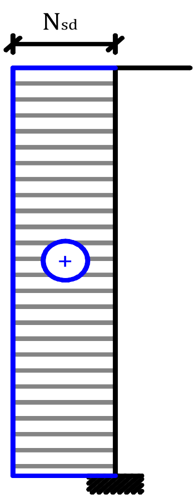
$$f'_{cd} = \frac{0.83 \cdot 0.85 \cdot R_{ck}}{\gamma_c} = \frac{0.83 \cdot 0.85 \cdot 25}{1.5} = \quad 11,76 \quad \text{MPa}$$

$$f_{sd} = \frac{f_{sy}}{\gamma_s} = \frac{450}{1.15} = \quad 391,30 \quad \text{MPa}$$

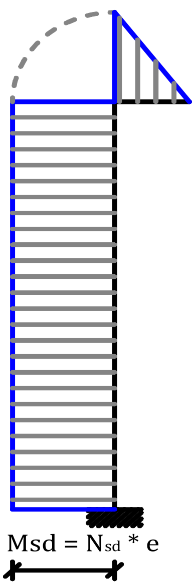
$$\varepsilon_{sy} = \frac{f_{sy}}{E_s} = \frac{391.30}{210000} = \quad 0,0019$$

2. Calcolo delle Caratteristiche della sollecitazione interna

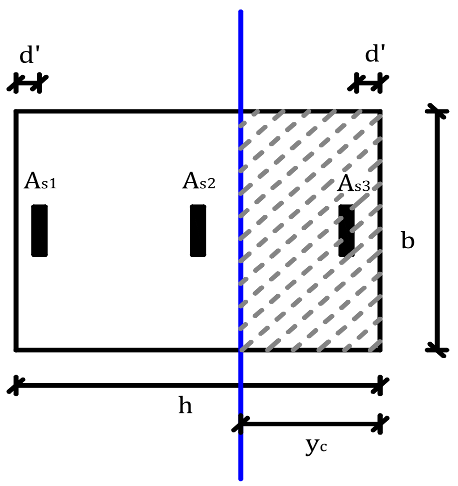
(N)



(M)



Schema di verifica



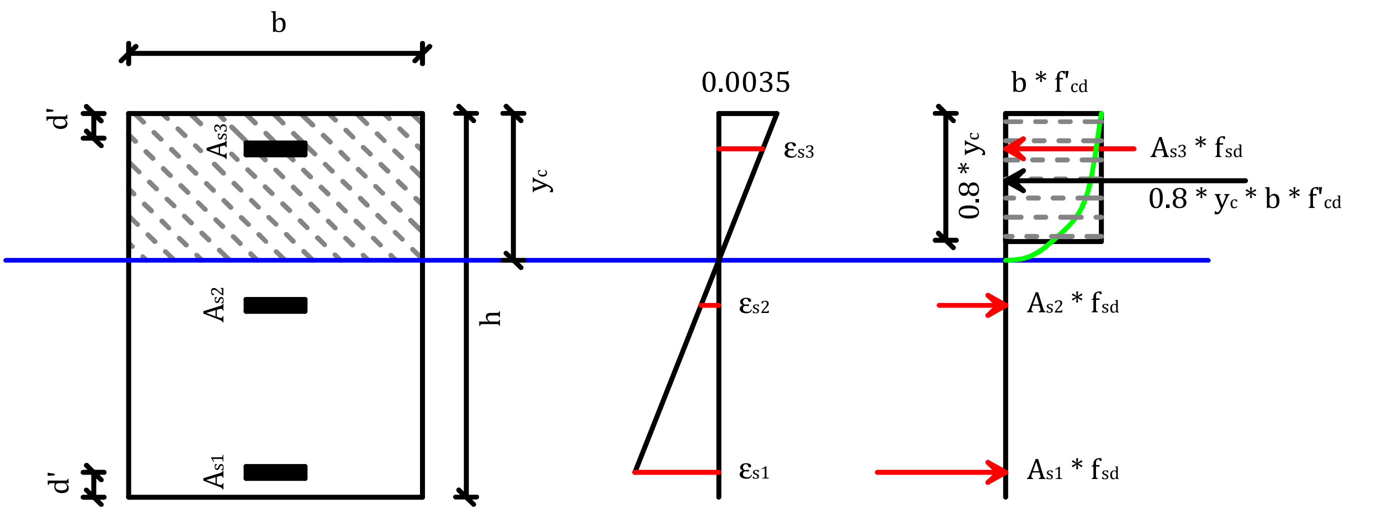
N_{Sd} = N = 200 kN

M_{Sd} = N * e = 42 kNm

3. Ricerca dell'asse neutro

Ipotesi

Si ipotizza in prima battuta che l'asse neutro y_c abbia una profondità tale da compartare lo snervamento di tutti i tre livelli di armatura, di conseguenza la tensione di calcolo dell'acciaio è pari proprio a f_{sd}



$$|\varepsilon_{s3}| > \varepsilon_{sy} \quad \rightarrow \quad \sigma_{s3} = f_{sd}$$

$$|\varepsilon_{s2}| > \varepsilon_{sy} \quad \rightarrow \quad \sigma_{s2} = f_{sd}$$

$$|\varepsilon_{s1}| > \varepsilon_{sy} \quad \rightarrow \quad \sigma_{s1} = f_{sd}$$

Equilibrio alla traslazione

$$0.8 \cdot y_c \cdot b \cdot f'_{cd} + A_{s3} \cdot f_{sd} - A_{s2} \cdot f_{sd} - A_{s1} \cdot f_{sd} = N_{sd}$$

$$y_c = \frac{-A_{s3} \cdot f_{sd} + A_{s2} \cdot f_{sd} + A_{s1} \cdot f_{sd} + N_{sd}}{0.8 \cdot b \cdot f'_{cd}} = \frac{-1005 \cdot 391.30 + 402 \cdot 391.30 + 1005 \cdot 391.30 + 200000}{0.8 \cdot 250 \cdot 11.76} = \quad 151,94 \text{ mm}$$

Verifica della correttezza dell'ipotesi (controllare se effettivamente tutte le armature sono snervate)

yc = 15,19 cm

dal diagramma delle deformazioni si calcolano per proprzione tra i triangoli le deformazioni dei tre livelli di armatura

Calcolo ε_{s3}
$$\frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} = \frac{\varepsilon_{s3}}{y_c - d'} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{s3} = \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} \cdot (y_c - d') = \frac{0.0035}{15.19} \cdot (15.19 - 3) = \quad 0,0028$$

Calcolo ε_{s2}
$$\frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} = \frac{\varepsilon_{s2}}{y_c - h/2} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{s2} = \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} \cdot \left(y_c - h/2\right) = \frac{0.0035}{15.19} \cdot (15.19 - 22.5) = \quad -0,0017$$

Calcolo ε_{s1} $\quad \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} = \frac{\varepsilon_{s1}}{y_c - d} \rightarrow \varepsilon_{s1} = \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} \cdot (y_c - d) = \frac{0.0035}{15.19} \cdot (15.19 - 42) =$ -0,0062

essendo $\varepsilon_{sy} = \frac{f_{sy}}{E_s} = \frac{391.30}{210000} =$ 0,0019

si osserva che A_{s2} non è snervata in quanto $|\varepsilon_{s2}| < \varepsilon_{sy}$

L'ipotesi non è verificata!!!

Occorre ricalcolare l'asse neutro con la nuova ipotesi che considera le due armature estreme snervate e l'armatura centrale A_{s2} non snervata

$$|\varepsilon_{s3}| > \varepsilon_{sy} \rightarrow \sigma_{s3} = f_{sd}$$

$$|\varepsilon_{s2}| < \varepsilon_{sy} \rightarrow \sigma_{s2} = E_s \cdot \varepsilon_{s2}$$

$$|\varepsilon_{s1}| > \varepsilon_{sy} \rightarrow \sigma_{s1} = f_{sd}$$

dove

$$\varepsilon_{s2} = \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} \cdot \left(y_c - h/2\right)$$

Equilibrio alla traslazione

$$0.8 \cdot y_c \cdot b \cdot f'_{cd} + A_{s3} \cdot f_{sd} + A_{s2} \cdot E_{sd} \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} \cdot \left(y_c - h/2\right) - A_{s1} \cdot f_{sd} = N_{sd}$$

si ottiene un'equazione di 2° grado

$$(0.8 \cdot b \cdot f'_{cd}) y_c^2 + (A_{s3} \cdot f_{sd} + A_{s2} \cdot E_{sd} \cdot \varepsilon_{cu} - A_{s1} \cdot f_{sd} - N_{sd}) y_c - A_{s2} \cdot E_{sd} \cdot \varepsilon_{cu} \cdot h/2 = 0$$

$$2350 \cdot y_c^2 + 95470 \cdot y_c - 66480750 = 0$$

$y_{c1} =$ 149,10 mm

$y_{c2} =$ -189,73 mm

l'asse neutro è quindi pari a $y_c =$ 14,91 cm

Calcolo ε_{s3} $\quad \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} = \frac{\varepsilon_{s3}}{y_c - d'} \rightarrow \varepsilon_{s3} = \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} \cdot (y_c - d') = \frac{0.0035}{14.91} \cdot (14.91 - 3) =$ 0,0028

Calcolo ε_{s2} $\quad \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} = \frac{\varepsilon_{s2}}{y_c - h/2} \rightarrow \varepsilon_{s2} = \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} \cdot \left(y_c - h/2\right) = \frac{0.0035}{14.91} \cdot (14.91 - 22.5) =$ -0,0018

Calcolo ε_{s1} $\quad \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} = \frac{\varepsilon_{s1}}{y_c - d} \rightarrow \varepsilon_{s1} = \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} \cdot (y_c - d) = \frac{0.0035}{14.91} \cdot (14.91 - 42) =$ -0,0064

Dal calcolo delle deformazioni l'ipotesi fatta risulta verificata, si può quindi procedere alla verifica della sezione determinando il momento ultimo

Equilibrio alla rotazione (rispetto al baricentro della sezione)

$$0.8 \cdot y_c \cdot b \cdot f'_{cd} \left(h/2 - 0.4 \cdot y_c \right) + A_{s3} \cdot f_{sd} \left(h/2 - d' \right) + \cancel{A_{s2} \cdot E_s \cdot \varepsilon_{s2} \cdot 0} + A_{s1} \cdot f_{sd} \left(h/2 - d' \right) = M_{u,G}$$

il braccio è nullo

$$0.8 \cdot 149.1 \cdot 250 \cdot 11.76 (225 - 0.4 \cdot 149.1) + 1005 \cdot 391.3 (225 - 30) + 1005 \cdot 391.3 (225 - 30) =$$ 2,11E+08 Nmm

Il momento ultimo della sezione è pari a $M_{u,G}$ = 211,36 kNm > di M_{Sd} (42 kNm)

Sezione verificata a Pressoflessione!

Esercizio n.3: Procedimento alternativo

Risoluzione per via numerica

Dati

b=	250	mm
h=	450	mm
d'=	30	mm
e=	210	mm
A_{s1}=	1005	mm^2
A_{s2}=	402	mm^2
A_{s3}=	1005	mm^2
N=	200,00	kN
R_{ck}=	25,0	MPa

Acciaio B450C

Valori di calcolo delle tensioni dei materiali

f_{cd}= 11,76 MPa

f_{sd}= 391,30 MPa E_s= 210000 MPa

Valori di calcolo delle deformazioni ultime dei materiali

ε_{cu}= 0,0035

ε_{ud}= 0,0675

N.B.: nel presente esercizio si ipotizza che il legame tensioni-deformazioni dell'acciaio sia di tipo elastico-perfettamente-plastico: in questa ipotesi la normativa (NTC - D.M. 14/01/2008) consente di non assumere un limite per la deformazione assiale. Tuttavia nello svolgimento tale limite è stato assunto proprio pari a quello che la stessa normativa prevede per lo stesso materiale nell'ipotesi che lo si voglia considerare elasico-incrudente (cfr. NTC - punto 4.1.2.1.2.3)

Ricerca dell'asse neutro

- 1ª iterazione $y_{c,1}$= 274,08 mm *N.B.: il val. iniziale è arbitrario in questo caso $y_{c,1} = y_{3,4}$*

$N_c(y_{c,1})$= 644550 N

#	$A_{s,i}$ [mm^2]	$y_{s,i}$ [mm]	$y_{c,1}$ [mm]	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$ [MPa]	$N_{s,i}$ [N]
1	1005	420		-0,00186	-391,30	-393261
2	402	225	274,08	0,00063	131,62	52912,3
3	1005	30		0,00312	391,30	393261

$N_s(y_{c,1})$= 52912,3 N

ΔN_1= 497462,3 N

Δy_1= 211,54 N

- 2^a iterazione $y_{c,2}$= 62,55 mm

$N_c(y_{c,2})$= 147087,7 N

#	$A_{s,i}$	$y_{s,i}$	$y_{c,1}$	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$	$N_{s,i}$
	[mm^2]	[mm]	[mm]		[MPa]	[N]
1	1005	420		-0,0200	-391,30	-393261
2	402	225	62,55	-0,0091	-391,30	-157304
3	1005	30		0,0018	382,46	384373

$N_s(y_{c,2})$= -166193 N

ΔN_2= -219105 N

- 3^a iterazione

N.B.: da questa iterazione in poi, avendo trovato due valori di segno opposto dell'errore DN, si procede secondo il ***metodo della secante*** *per scegliere il valore corrente* $y_{c,i}$.

$y_c^{(+)}$= 274,08 mm $y_c^{(-)}$= 62,55 mm

$\Delta N^{(+)}$= 497462,34 N $\Delta N^{(-)}$= -219104,94 N

$y_{c,3}$= 127,23 mm

$N_c(y_{c,3})$= 299196,9 N

#	$A_{s,i}$	$y_{s,i}$	$y_{c,1}$	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$	$N_{s,i}$
	[mm^2]	[mm]	[mm]		[MPa]	[N]
1	1005	420		-0,0081	-391,30	-393261
2	402	225	127	-0,0027	-391,30	-157304
3	1005	30		0,0027	391,30	393261

$N_s(y_{c,3})$= -157304 N

ΔN_3= -58107,5 N

- 4^a iterazione

$y_c^{(+)}$= 274,08 mm $y_c^{(-)}$= 127,23 mm

$\Delta N^{(+)}$= 497462,34 N $\Delta N^{(-)}$= -58107,49 N

$y_{c,4}$= 142,59 mm

$N_c(y_{c,4})$= 335317,6 N

#	$A_{s,i}$	$y_{s,i}$	$y_{c,1}$	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$	$N_{s,i}$
	[mm^2]	[mm]	[mm]		[MPa]	[N]
1	1005	420		-0,0068	-391,30	-393261
2	402	225	143	-0,0020	-391,30	-157304
3	1005	30		0,0028	391,30	393261

$N_s(y_{c,4})$= -157304 N

ΔN_4= -21986,7 N

- 5^a iterazione

$y_c^{(+)}=$ 274,08 mm $y_c^{(-)}=$ 142,59 mm

$\Delta N^{(+)}=$ 497462,34 N $\Delta N^{(-)}=$ -21986,73 N

$y_{c,5}=$ 148,15 mm

$N_c(y_{c,5})=$ 348406,5 N

#	$A_{s,i}$ [mm^2]	$y_{s,i}$ [mm]	$y_{c,1}$ [mm]	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$ [MPa]	$N_{s,i}$ [N]
1	1005	420		-0,0064	-391,30	-393261
2	402	225	148,15	-0,0018	-381,24	-153260
3	1005	30		0,0028	391,30	393261

$N_s(y_{c,5})=$ -153260 N

$\Delta N_5=$ -4853,82 N

- 6^a iterazione

$y_c^{(+)}=$ 274,08 mm $y_c^{(-)}=$ 148,15 mm

$\Delta N^{(+)}=$ 497462,34 N $\Delta N^{(-)}=$ -4853,82 N

$y_{c,6}=$ 149,37 mm

$N_c(y_{c,6})=$ 351268,1 N

#	$A_{s,i}$ [mm^2]	$y_{s,i}$ [mm]	$y_{c,1}$ [mm]	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$ [MPa]	$N_{s,i}$ [N]
1	1005	420		-0,0063	-391,30	-393261
2	402	225	149	-0,0018	-372,15	-149605
3	1005	30		0,0028	391,30	393261

$N_s(y_{c,6})=$ -149605 N

$\Delta N_6=$ 1663,352 N

- 7^a iterazione

$y_c^{(+)}=$ 149,37 mm $y_c^{(-)}=$ 148,15 mm

$\Delta N^{(+)}=$ 1663,35 N $\Delta N^{(-)}=$ -4853,82 N

$y_{c,7}=$ $\underline{149,06}$ mm

$N_c(y_{c,7})=$ 350537,7 N

#	$A_{s,i}$ [mm^2]	$y_{s,i}$ [mm]	$y_{c,1}$ [mm]	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$ [MPa]	$N_{s,i}$ [N]
1	1005	420		-0,0064	-391,30	-393261
2	402	225	149,06	-0,0018	-374,46	-150532
3	1005	30		0,0028	391,30	393261

$N_s(y_{c,7})=$ -150532 N

$\Delta N_7=$ 5,67 N

Il procedimento di convergenza può arrestarsi a questo punto, avendo ristretto l'intervallo di ricerca ($y_c^{(-)}$,$y_c^{(+)}$) a valori di ampiezza trscurabili rispetto all'altezza della sezione ed avendo riscontrato un errore DN trascurabile rispetto alla resistenza allo SLU per compresione della sezione.

$y_c^{(-)}$=	148,15	mm
$y_c^{(+)}$=	149,37	mm
Δy=	1,22	mm
$\Delta y/h$	0,27%	

Calcolo del valore di progetto del momento resistente M_{Rd}.

y_c= 149,06 mm

$M_c(y_c)$= 57970631 Nmm

#	$A_{s,i}$ [mm^2]	$y_{s,i}$ [mm]	$y_{c,1}$ [mm]	$\varepsilon_{s,i}$	$\sigma_{s,i}$ [MPa]	$N_{s,i}$ [N]	$M_{s,i}$ [Nm]
1	1005	420		-0,0064	-391,30	-393261	76685869,6
2	402	225	149,06	-0,0018	-374,46	-150532	0
3	1005	30		0,0028	391,30	393261	76685869,6

$M_s(y_c)$= 153371739 Nmm

M_{Rd}= 211,34 kNm

Verifica allo SLU per Tensioni Normali

M_{Ed}= 42,00 kNm

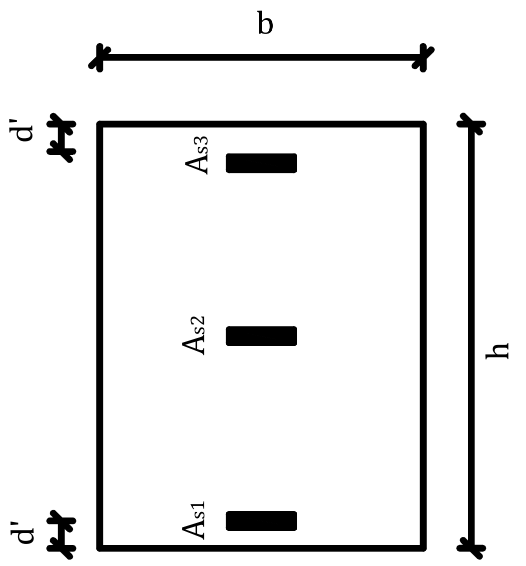
$M_{Ed}<M_{Rd}$ **<u>Sezione verificata allo SLU per tensioni normali</u>**

0

Esercizio n. 4 (Punti 8)

Per lo schema riportato all'esercizio precedente si determini, con riferimento agli Stati Limite di Esercizio, il momento di prima fessurazione M_{fess}. Per le caratteristiche dei materiali si faccia sempre riferimento all'esercizio precedente.

b =	25	cm
h =	45	cm
d' =	3	cm
A_{s1} =	10,05	cm^2
A_{s2} =	4,02	cm^2
A_{s3} =	10,05	cm^2
N =	200	kN
R_{ck} =	25	MPa
Acciaio	B450C	

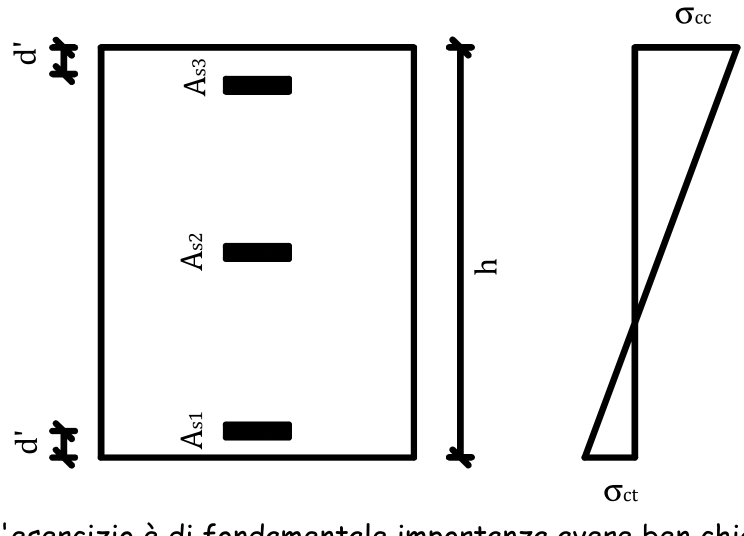


Chiarimenti

Determinare il momento di prima fessurazione per una sezione pressoinflessa significa determinare la massima eccentricità che lo sforzo normale assegnato N può avere senza che si verifichi la fessurazione del calcestruzzo al lembo teso, in quanto vale la relazione:

$$M_{fess} = N_{Sd} \cdot e_{fess}$$

Come è noto, per ottenere la condizione di non fessurazione dovrà verificarsi che la tensione di trazione massima nel calcestruzzo sia inferiore al limite massimo di trazione indicato con f_{ctk} oppure, sotto determinate ipotesi di calcolo, del limite massimo a flessione $f_{cfk.}$



Per lo svolgimento del'esercizio è di fondamentale importanza avere ben chiara la distinzione tra baricentro della sezione reagente ed asse neutro; nel prosieguo per evitare confusione tra le due distinte entità (coincidenti solo nel caso di flessione semplice) si indicherà:

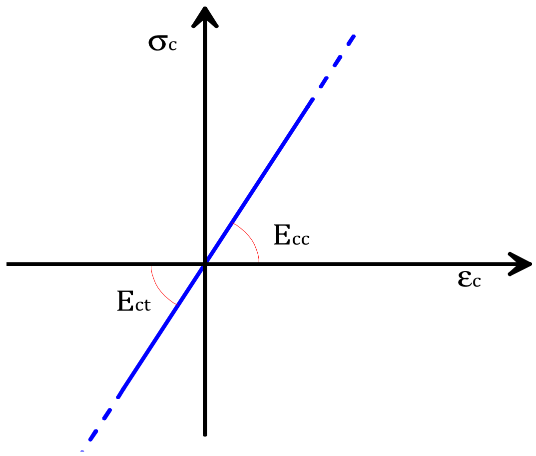
y_c = asse passante per il baricentro della sezione reagente

y_n = asse neutro della sezione pressoinflessa

Lo svolgimento dell'esercizio può avvenire in modi diversi ma equivalenti tra loro, nel prosieguo si risolverà l'esercizio in due diversi modi possibili elencati in ordine crescente di difficoltà.

Svolgimento n.1

Si ipotizza che il modulo elastico del calcestruzzo in trazione sia uguale al modulo elastico del calcetruzzo compresso



Il coefficiente di omogeneizzazione del calcestruzzo teso rispetto a quello compresso vale:

$$n' = \frac{E_{ct}}{E_{cc}} = 1$$

Sotto tale ipotesi il controllo della tensione di trazione deve essere condotto rispetto a f_{cfk} che vale:

$$f_{cfk} = 1.2 \cdot f_{ctk}$$

Caratteristiche dei materiali

$f_{ck} = 0.83 \cdot R_{ck} = 0.83 \cdot 25 =$ 20,75 MPa

$f_{ctk} = 0.7 \cdot f_{ctm} = 0.7 \cdot 0.3 \cdot f_{ck}^{2/3} =$ 1,59 MPa

$f_{cfk} = 1.2 \cdot f_{ctk} =$ 1,90 MPa

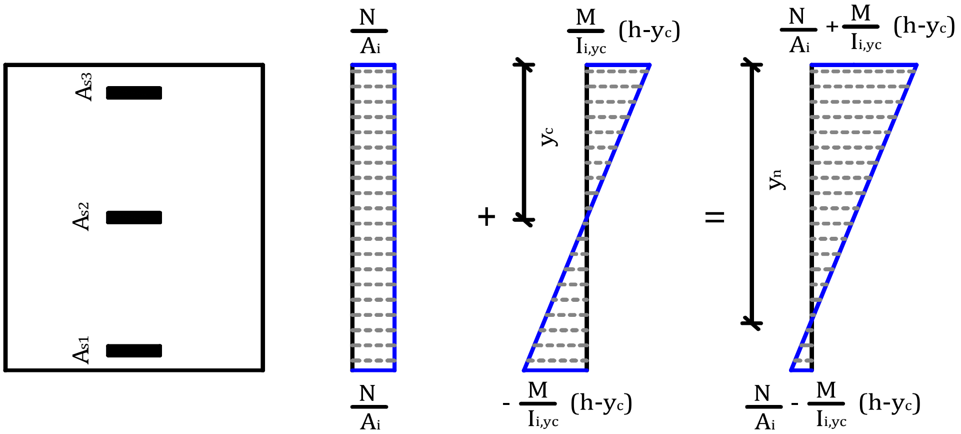
La verifica viene condotta in campo elastico verificando che risulti:

$$\sigma_{ct} = \frac{N}{A_i} - \frac{M}{I_{i,y_c}}(h - y_c) \le f_{cfk}$$

da cui ponendo l'uguaglianza tra le tensioni è possibile determinare il momento di fessurazione.

Si sottolinea che nell'equazione <u>y_c è la distanza tra il lembo compresso e il baricentro della sezione reagente</u> e non l'asse neutro!

L'equazione scritta può essere meglio compresa con la rappresentazione grafica seguente che tiene conto della sovrapposizione degli effetti.



Si vede quindi come con questo approccio non sia necessario determinare l'asse neutro il che semplifica notevolmente il problema!
L'unica incognita necessaria per la risoluzione dell'equazione nota come formula di Navier è quindi la posizione del baricentro della sezione reagente che nel caso specifico di sezione simmetrica è proprio pari ad h/2 = 22.5 cm

$$f_{cfk} = \frac{N}{A_i} - \frac{M_{fess,yc}}{I_{i,y_c}}\left(h - h/2\right)$$

Nota: nel caso in cui la sezione non fosse stata simmetrica si sarebbe dovuta determinare la posizione del baricentro della sezione reagente calcolando il momento statico rispetto ad un fissato asse (ad esempio il bordo superiore) e dividendolo per l'area.

$$S_{bordo,sup} = \frac{b \cdot h^2}{2} + n \cdot A_{s3} \cdot d' + n \cdot A_{s2} \cdot h/2 + n \cdot A_{s1} \cdot d$$

$$A_i = A_c + (n-1)(A_{s1} + A_{s2} + A_{s3})$$

$$y_c = \frac{S_{bordo,sup}}{A_i} =$$ *distanza del baricentro dal bordo superiore*

$I_{i,yc}$ è il momento d'inerzia della sezione reagente rispetto al baricentro, mentre A_i è l'area ideale della sezione.

$$I_{i,yc} = \frac{b \cdot h^3}{12} + n \cdot \left[A_{s3}\left(h/2 - d'\right)^2 + A_{s1}\left(h/2 - d'\right)^2\right] = \frac{25 \cdot 45^3}{12} + 15 \cdot \left[10.05(22.5-3)^2 + 10.05(22.5-3)^2\right] =$$

304489 cm^4

$$A_i = A_c + (n-1)(A_{s1} + A_{s2} + A_{s3}) = 25 \cdot 45 + (15-1)(10.05 + 4.02 + 10.05) =$$ 1462,68 cm^2

$$M_{fess,yc} = \left(\frac{N}{A_i} - f_{cfk}\right) \cdot \frac{I_i}{\left(h - h/2\right)} = \left(\frac{200000}{146268} + 1.90\right) \cdot \frac{3044890000}{(450-225)} =$$ 4,4E+07 Nmm

$M_{fess,yc}$ = 44,22 kNm

Il momento così determinato è il momento rispetto all'asse baricentrico della sezione reagente, l'eccentricità sarà quindi misurata da tale punto

$$e_{fess,yc} = \frac{M_{fess,yc}}{N} = \frac{44.22}{200} =$$ 0,2211 m

Nota
Nel caso in cui interessi conoscere la profondità dell'asse neutro y_n in condizione di prima fessurazione questo dovrà essere calcolato dalla relazione (ne risulta un'equazione di 3° grado):

$$S_n(y_n + c) - I_n = 0$$

dove c è noto in funzione di $e_{fess,yc}$ $\quad c = e_{fess,yc} - y_c = 22.11 - 22.5 =$ -0,39 cm

$$S_n = \frac{b \cdot y_n^2}{2} - n' \frac{b(h-y_n)^2}{2} + n \cdot A_{s3}(y_n - d') + n \cdot A_{s2}\left(y_n - h/2\right) - n \cdot A_{s1}(d - y_n)$$

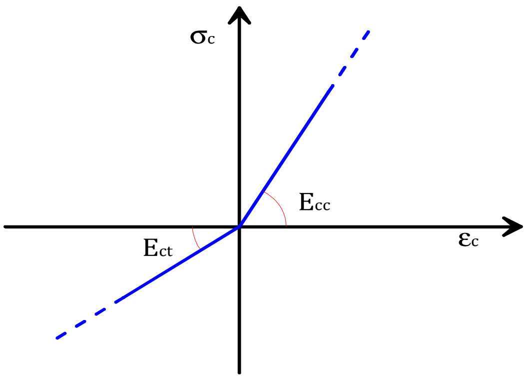
$$I_n = \frac{b \cdot y_n^3}{3} + n' \frac{b(h-y_n)^3}{3} + n \cdot A_{s3}(y_n - d')^2 + n \cdot A_{s2}\left(y_n - h/2\right)^2 + n \cdot A_{s1}(d - y_n)^2$$

Risolvendo l'equazione che ne deriva si ottiene come risultato: $y_n =$ 31,76 cm

che come si vede è diverso da y_c (in caso di flessione semplice ci sarebbe stata l'uguaglianza)

Svolgimento n.2

L'ipotesi alla base di questo secondo metodo di risoluzione è la non uguaglianza del modulo elastico del calcestruzzo tra compressione e trazione; in particolare si assume che il modulo elastico in trazione sia pari alla metà di quello in compressione.



Il coefficiente di omogeneizzazione del calcestruzzo teso rispetto a quello compresso vale:

$$n' = \frac{E_{ct}}{E_{cc}} = 0.5$$

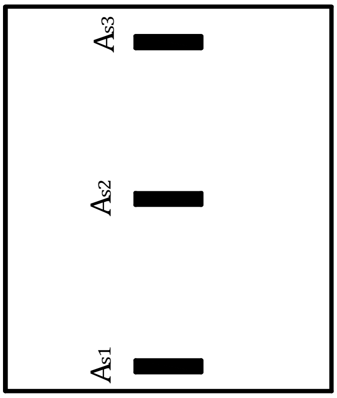
Sotto tale ipotesi il controllo della tensione di trazione deve essere condotto rispetto a f_{ctk}

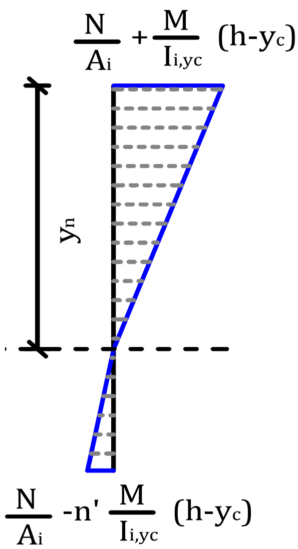
La verifica viene condotta in campo elastico verificando che risulti:

$$\sigma_{ct} = \frac{N}{A_i} - \frac{M}{I_{i,y_c}}(h - y_c) \le f_{ctk}$$

da cui ponendo l'uguaglianza tra le tensioni è possibile determinare il momento di fessurazione.

Si sottolinea che anche questa volta nell'equazione <u>y_c è la distanza tra il lembo compresso e il baricentro della sezione reagente</u> e non l'asse neutro!





L'incognita necessaria per la risoluzione dell'equazione nota come formula di Navier è quindi la posizione del baricentro della sezione reagente, in questo caso, al contrario dello svolgimento n.1 questo è funzione di y_n in quanto il considerare n'= 0.5 causa la perdita della simmetria della sezione.

Nota: in tale situazione utilizzare la relazione di Navier si rivela maggiormente complicato data la bilinearità del diagramma delle tensioni in un punto che non è yc!

Occorre quindi preventivamente determinare l'asse neutro in condizione di prima fessurazione, il che può avvenire attraverso l'equazione di verifica in pressoflessione alle tensioni ammissibili al lembo compresso.

$$\sigma_{ct} = n' \frac{N}{S_{n,y_n}}(h - y_n) \le f_{ctk}$$ dove l'unica incognita è y_n

$$S_{n,yn} = \frac{b \cdot y_n^2}{2} - n' \frac{b(h-y_n)^2}{2} + n \cdot A_{s3}(y_n - d') + n \cdot A_{s2}\left(y_n - h/2\right) + n \cdot A_{s1}(y_n - d)$$

$$S_{n,yn} = \frac{250 \cdot y_n^2}{2} - 0.5\frac{250(450-y_n)^2}{2} + 15 \cdot 1005(y_n - 30) + 15 \cdot 402(y_n - 225) + 15 \cdot 1005(y_n - 420)$$

$$S_{n,yn} = 125 \cdot y_n^2 - 62.5\left(450^2 - 2 \cdot 450 \cdot y_n + y_n^2\right) + 15 \cdot 1005(y_n - 30) + 15 \cdot 402(y_n - 225) + 15 \cdot 1005(y_n - 420)$$

$$S_{n,yn} = 125 \cdot y_n^2 - 62.5\left(450^2 - 2 \cdot 450 \cdot y_n + y_n^2\right) + 15 \cdot 1005(y_n - 30) + 15 \cdot 402(y_n - 225) + 15 \cdot 1005(y_n - 420)$$

$$S_{n,yn} = 62.5 \cdot y_n^2 + 92430 \cdot y_n - 20796750$$

Imponendo la tensione di trazione pari a f_{ctk} si ottiene:

$$f_{ctk} = n' \frac{N}{S_{n,y_n}}(h - y_n) \quad \rightarrow \quad f_{ctk} \cdot S_{n,y_n} = n' \cdot N(h - y_n)$$

$$f_{ctk} \cdot \left(62.5 \cdot y_n^2 + 92430 \cdot y_n - 20796750\right) = n' \cdot N(h - y_n)$$

$$1.59 \cdot \left(62.5 \cdot y_n^2 + 92430 \cdot y_n - 20796750\right) = 0.5 \cdot 200000(450 - y_n)$$

$$99.375 \cdot y_n^2 + 146963.7 \cdot y_n - 33066832.5 = 45000000 - 100000 \cdot y_n$$

$$99.375 \cdot y_n^2 + 246963.7 \cdot y_n - 78066832.5 = 0$$

y_{n1} = 283,72 mm

y_{n2} = negativo

Noto l'asse neutro è possibile determinare il momento di fessurazione rispetto all'asse neutro y_n.

Calcolo $M_{fess,yn}$ rispetto all'asse neutro

Dalla relazione di verifica in pressoflessione alle tensioni ammissibili si ha:

$$f_{ctk} = -n' \frac{M_{fess,yn}}{I_{n,y_n}}(h - y_n) \quad \rightarrow \quad M_{fess,yn} = -\frac{f_{ctk} \cdot I_{n,y_n}}{n' \cdot (h - y_n)}$$

$$I_{n,yn}=\frac{b\cdot y_n^3}{3}-n'\frac{b(h-y_n)^3}{3}+n\cdot A_{s3}(y_n-d')^2+n\cdot A_{s2}\left(y_n-h/_2\right)^2+n\cdot A_{s1}(y_n-d)^2$$

$$I_{n,yn}=\frac{25\cdot 28.37^3}{3}+0.5\frac{25(45-28.37)^3}{3}+15\left[10.05(28.37-3)^2+4.02(28.37-22.5)^2+10.05(28.37-42)^2\right]=$$

336557 cm^4

$$M_{fess,yn}=-\frac{f_{ctk}\cdot I_{n,y_n}}{n'\cdot(h-y_n)}=\frac{1.59\cdot 3365570000}{0.5\cdot(450-283.72)}=$$ 6,4E+07 Nmm

64,36 kNm

L'eccentricità rispetto all'asse neutro vale:

$$e_{fess,yn}=\frac{M_{fess,yn}}{N}=\frac{64.36}{200}=$$ 0,3218 m

E' possibile determinare yc in quanto l'asse neutro è già stato determinato (yn = 283.72mm) e quindi è nota la sezione reagente.

$$y_n-y_c=\frac{S_{n,y_n}}{A_i}\quad\rightarrow\quad y_c=y_n-\frac{S_{n,y_n}}{A_i}$$

$$S_{n,yn}=\frac{b\cdot y_n^2}{2}-n'\frac{b(h-y_n)^2}{2}+n\cdot A_{s3}(y_n-d')+n\cdot A_{s2}\left(y_n-h/_2\right)+n\cdot A_{s1}(y_n-d)=$$ 10458,55 cm^3

$$A_i=b\cdot y_n+n'\cdot b(h-y_n)+(n-1)\left[A_{s3}+A_{s2}+A_{s1}\right]=$$ 1254,83 cm^2

$$y_c=y_n-\frac{S_{n,y_n}}{A_i}=$$ 20,04 cm *Nota yc < h/2 anche se la sezione è simmetrica avendo posto n'=0.5 !*

A questo punto è possibile determinare l'eccentricità rispetto al baricentro della sezione reagente:

$$e_{fess,yc}=e_{fess,yn}-y_n+y_c=32.18-28.37+20.04=$$ *23,85 cm*

$$M_{fess,yc}=N\cdot e_{fess,yc}=200\cdot 0.2385=$$ *47,70 kNm*

Considerazioni

I due procedimenti sono del alternativi e comportano differenze di risultato nell'ordine del 5-10%.

Svolgimento n.1	**Svolgimento n.2**
$M_{fess,yc}$ = 44,22 kNm	$M_{fess,yc}$ = 47,70 kNm

I valori delle tensioni limite in trazione sono stati assunti in questo esercizio secondo le prescrizioni del D.M. 96. Volendo svolgere lo stesso in accordo alle più recenti disposizioni normative (NTC - D.M. 14/01/2008) il valore limite della tensione in trazione deve essere posto pari a (cfr. 4.2.1.2.4.1):

$$\sigma_{ct} = \frac{f_{ctm}}{1,2}$$

Il valore derivante da tale relazione può essere irettamente utilizzato nell'ambito el secondo procedimento, mentre per applicare il primo è opportuno moltiplicare sct per il fattore 1.2 che tiene conto del rapporto che esiste tra la tensione di trazione determinata tramite prove di flessione f_{cf} e quella ottenuta tramite prove di trazione f_{ct}.