ESERCIZIO N° 1

DATI

$L = 6.0\ m$

$F = 50\ kN$

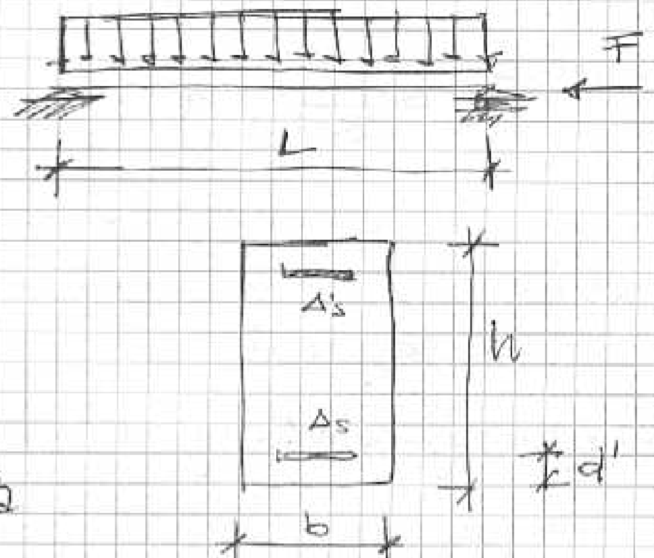
$b = 30\ cm$

$h = 70\ cm$

$A_s = A'_s = 15.70\ cm^2$

$FeB38K \rightarrow \bar{\sigma}_s = 220\ MPa$

$R_{ck} = 25\ MPa \rightarrow \bar{\sigma}_c = 8.5\ MPa$



SVOLGIMENTO

La sezione più sollecitata è, ovviamente, quella di mezzeria soggetta ad max momento flettente

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8}$$

Tutte le sezioni della trave sono ~~soggette~~ sollecitate in PRESSOFLESSIONE. Essendo incognito il carico, lo sono anche il momento M_{max}, l'eccentricità e e la distanza c tra centro di pressione e lembo compresso della sezione. Non è, dunque, risolvibile l'equazione

$$S_n(y_c)\,(y_c + c) - I_n(y_c) = 0 \qquad (1)$$

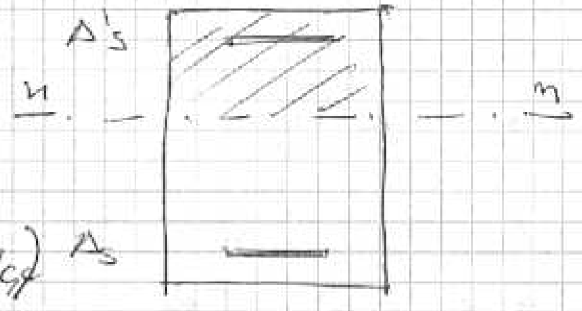
Poiché in essa compaiono due incognite.
Bisogna allora, considerare le relazioni di equilibrio da cui la (1) deriva:

$$\sigma_c = \frac{N}{S_n}\, y_c \qquad\qquad \sigma_c = \frac{M_n}{I_n}\, y_c \qquad (2)$$

In particolare, dalla prima delle (2) si può ricavare la posizione dell'asse neutro

$y_c = y_{c,c}$ che corrisponde, sotto una azione assiale $N = \bar{F}$, al raggiungimento della tensione ammissibile $\bar{\sigma}_c$ nel calcestruzzo:

$$\bar{\sigma}_c = \frac{N}{S_n(y_c)} \cdot y_{c,c} \qquad (3)$$



L'espressione del momento statico S_n in funzione di y_c è la seguente

$$S_n(y_{c,c}) = \frac{b y_c^2}{2} + n A_s' (y_{c,c} - d') - n A_s (d - y_{c,c})$$

e, dunque, la (3) può porsi nella forma seguente

$$\frac{b y_{c,c}^2}{2} + \left[n (A_s' + A_s) - \frac{N}{\bar{\sigma}_c} \right] y_{c,c} - n (A_s d + A_s' d') = 0$$

Introducendo i valori numerici e considerando, in particolare, $d' = 30$ mm e $n = 15$, si ottiene

$$150\, y_{c,c}^2 + 41217.6\, y_{c,c} - 1648500 = 0$$

da cui, l'unica soluzione meccanicamente accettabile è

$$y_{c,c} = 221.46 \text{ mm}.$$

Il corrispondente valore del momento d'inerzia della sezione reagente vale

$$I_{n,c} = \frac{b y_{c,c}^3}{3} + n \left[A_s' (y_{c,c} - d')^2 + A_s (d - y_{c,c})^2 \right] = 6.6874 \cdot 10^9$$

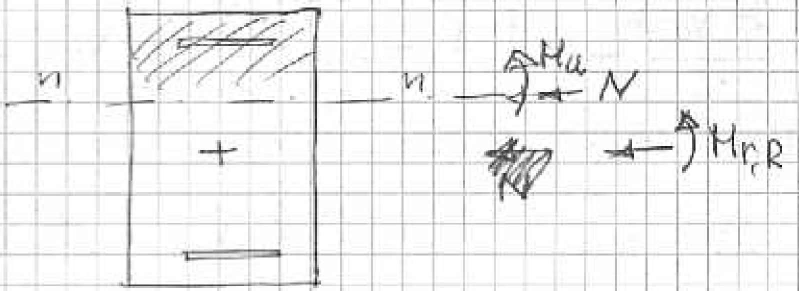
da cui, utilizzando la seconda delle (2), si ha

$$M_{u,c} = \frac{\bar{\sigma}_c I_{n,c}}{y_{c,c}} = 256.67 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 256.67 \text{ kNm}$$

~~Il momento~~ $M_{u,c}$ rappresenta il valore del momento massimo corrispondente al raggiungimento della tensione massima nel cls, sotto una azione assiale N. Esso tuttavia, è riferito all'asse neutro:

e non al baricentro geometrico della sezione

$$M_{Ra,c} = M_{u,c} \pm N\left(\frac{h}{2} - y_c\right)$$



$= 263.10$ kNm

Con riferimento ~~a~~ tale valore del momento il corrispondente carico massimo può essere ottenuto

$$q_c = \frac{8\ M_{Ra,c}}{L^2} = \frac{8\ 263.10}{6^2} = 58.47\ \text{kN/m}$$

E' facile constatare, tuttavia, che sotto questo carico, ovvero per $q_c = y_{c,c}$ la tensione nell'acciaio ~~acciaio vale~~ teso vale

$$\sigma_s = n\ \frac{\bar{\sigma}_c}{y_{c,c}}(d - y_{c,c}) = 15\ \frac{8.5}{221,166}(670 - 221,466) = 258.23 > \bar{\sigma}_s$$

e, dunque, il carico q_c determina il superamento della tensione ammissibile dell'acciaio. Pertanto, è necessario ripercorrere il procedimento delineato sopra imponendo nella prima delle (2) che sia l'acciaio a raggiungere la tensione ammissibile. Poiché vale sempre, in forza dell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane,

$$\frac{\sigma_c}{y_c} = \frac{\sigma_s / n}{d - y_c}$$

la ~~...~~ (1) si può riscrivere come segue imponendo pure $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$;

$$\bar{\sigma}_s = n\ \frac{N}{S_n(y_{c,s})} \cdot (d - y_{c,s})$$

avendo indicato con $y_{c,s}$ il valore dell'ordinata dell'asse neutro per la quale si ottiene il raggiungimento di $\overline{\sigma}_s$. Si ha, dunque,

$$\frac{b\,y_{c,s}^2}{2} + n\left[A'_s + A_s - \frac{N}{\overline{\sigma}_s}\right] y_{c,s} - n\,(A_s d + A'_s d') = 0$$

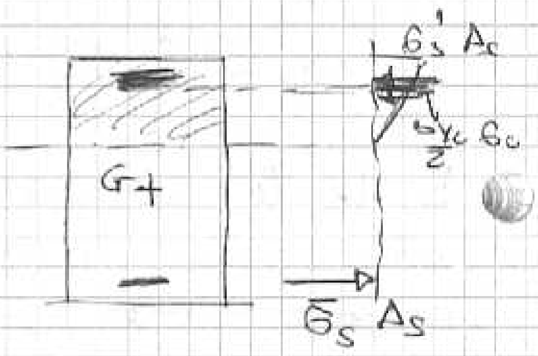
che, introducendo i valori numerici diviene

$$150\, y_{c,s}^2 + 13690{,}90\, y_{c,s} - 16485000 = 0$$

da cui, la soluzione meccanicamente ammissibile ($y_{c,s} > 0$)

$$y_{c,s} = 216.46 \text{ mm}.$$

In corrispondenza di tale asse neutro la sezione reagente è rappresentata a lato. La massima compressione al lembo superiore vale



$$\sigma_{c,s} = \frac{y_c}{d - y_c} \cdot \frac{\overline{\sigma}_s}{n} = 7.00 \text{ MPa} < \overline{\sigma}_c$$

e quella nell'armatura compressa

$$\sigma'_{s,s} = \frac{y_c - d'}{d - y_c} \cdot \overline{\sigma}_s = 90.44 \text{ MPa}$$

Di conseguenza il momento resistente baricentrico può calcolarsi direttamente come segue:

$$M_{RG,s} = \frac{b\,y_{c,s}\,\sigma_{c,s}}{2}\left(\frac{h}{2} - \frac{y_{c,s}}{3}\right) + A'_s\,\sigma'_{s,s}\left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s\,\overline{\sigma}_s\left(\frac{h}{2} - d'\right) =$$

$$= 219{,}11 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 219.11 \text{ kNm}$$

da cui il massimo carico distribuito

$$q_s = \frac{8\,M_{RG,s}}{L^2} = 40.69 \text{ kN/m}.$$

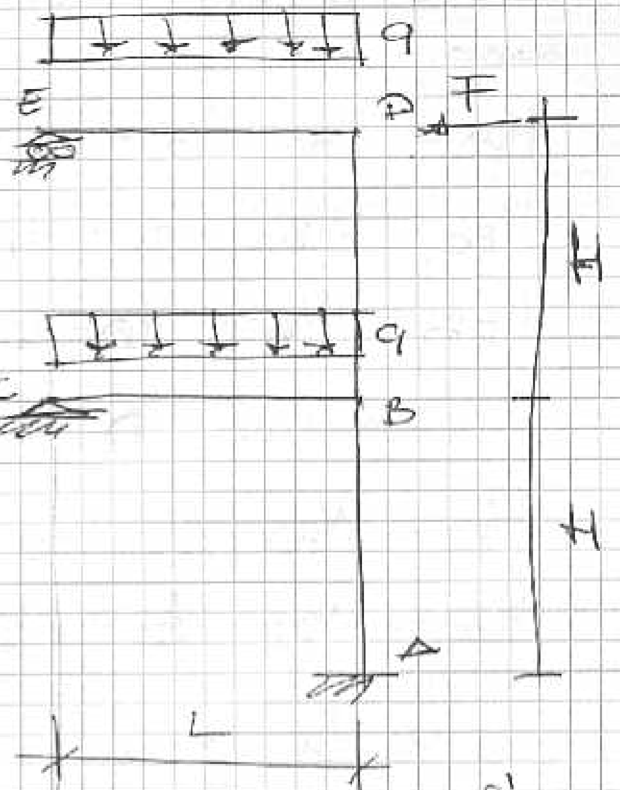
Considerando il peso proprio della trave come unico carico PERMANENTE

$$g = b \cdot h \cdot \gamma_{cls} = 0.3 \cdot 0.7 \cdot 25 = 5{,}25 \text{ kN/m}$$

il carico utile vale

$$q_u = q_{max} - g = q_s - g = 35.44 \text{ kN/m}$$

ESERCIZIO N. 2



DATI

$b_t = 40\ cm$; $h_t = 70\ cm$

$b_p = 40\ cm$; $h_p = 50\ cm$

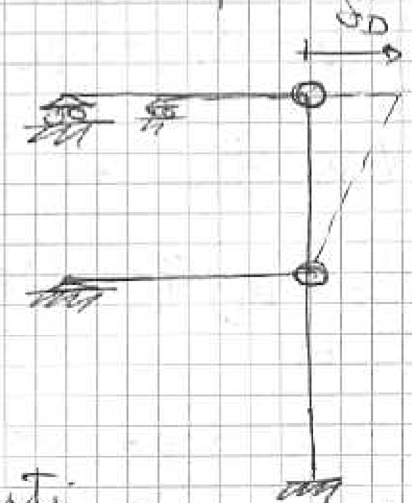
$H = 400\ cm$; $L = 600\ cm$

$q = 40{,}00 + 0.7 \cdot 0.4 \cdot 25{,}00 = 47\ KN/m$

$F = 50\ KN$

Svolgimento

Essendo la parte A-B-C a nodi fissi, il telaio ha un nodo spostabile come mostra il cinematismo costruito a lato con riferimento alla STRUTTURA RETICOLARE ASSOCIATA.



Di conseguenza, nell'ambito di una soluzione secondo il MdS le incognite sono le seguenti

$$\varphi_B \quad \varphi_D \quad \delta_D^{*}$$

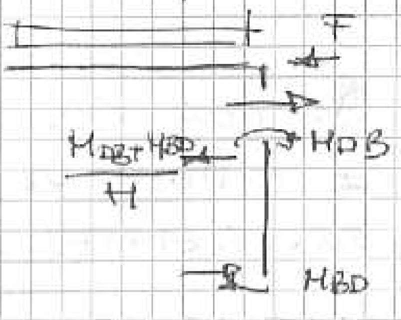
* spost assoluto di D →

~~Tre relazioni equilibrio~~ Due equazioni di equilibrio alla rotazione si possono scrivere.

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0$$

$$M_{DB} + M_{DE} = 0$$

ed una ulteriore equazione deriva dall'equilibrio alla traslazione del traverso ED



$$\frac{M_{DB}+M_{BD}}{H} - F = 0$$

poichè le ~~valori~~ espressioni dei momenti sono

$$M_{BA} = W_{BA} \cdot \varphi_B$$

$$M_{BC} = W_{BC} \cdot \varphi_B + \mu_{BC}$$

$$M_{DB} = W_{DB} \cdot \varphi_D + V_{DB} \cdot \varphi_B - U_{DB} \cdot \delta_{DB} =$$

$$= W_{DB} \cdot \varphi_D + V_{DB} \varphi_B - U_{DB} \cdot \delta_D$$

$$M_{BD} = W_{BD} \cdot \varphi_B + V_{BD} \cdot \varphi_D - U_{BD} \cdot \delta_D$$

$$M_{DE} = W_{DE} \cdot \varphi_D + \mu_{DE}$$

allora, le tre equazioni diventano

$$1) \left(W_{BA} + W_{BC} + W_{BC} \right) \varphi_B + V_{BD} \cdot \varphi_D - U_{BD} \cdot \delta_D = -\mu_{BC}$$

$$2) \quad V_{DB} \cdot \varphi_B + \left(W_{DB} + W_{DE} \right) \varphi_D - U_{DB} \delta_D = -\mu_{DE}$$

$$3) \left(\frac{W_{BD} + V_{DB}}{H} \right) \varphi_B + \left(\frac{W_{DB} + V_{BD}}{H} \right) \varphi_D - \left(\frac{U_{BD} + U_{DB}}{H} \right) \delta_D = F$$

da cui, dopo aver riconosciuto che

$$U_{BD} = \frac{W_{BD} + V_{DB}}{H} \quad ; \quad U_{DB} = \frac{W_{DB} + V_{BD}}{H}$$

si può porre nella seguente forma matriciale

$$\begin{bmatrix} W_{BA} + W_{BC} + W_{BC} & V_{BD} & -U_{BD} \\ V_{DB} & W_{DB} + W_{DE} & -U_{DB} \\ -U_{BD} & -U_{DB} & \frac{U_{BD} + U_{DB}}{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_D \\ \delta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_{BC} \\ -\mu_{DE} \\ F \end{bmatrix}$$

di cui, constatata la necessaria positività e simmetria, si lascia AL LETTORE DILIGENTE LA SOLUZIONE NUMERICA.

ESERCIZIO N. 3

DATI

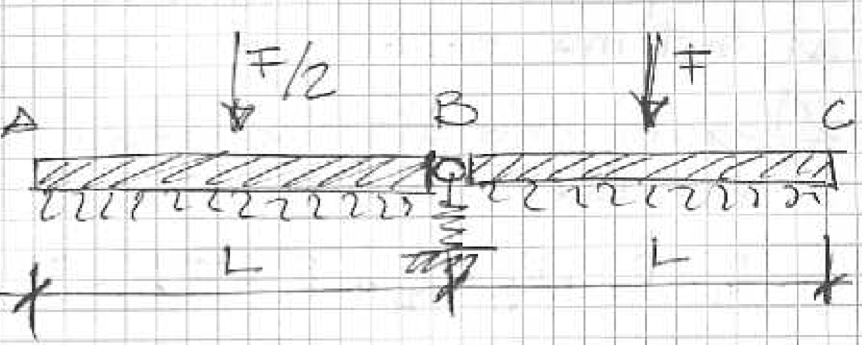
$B = 100$ cm

$L = 9.0$ m

$F = 120$ KN

$K_0 = 0.01$ N/mm^3

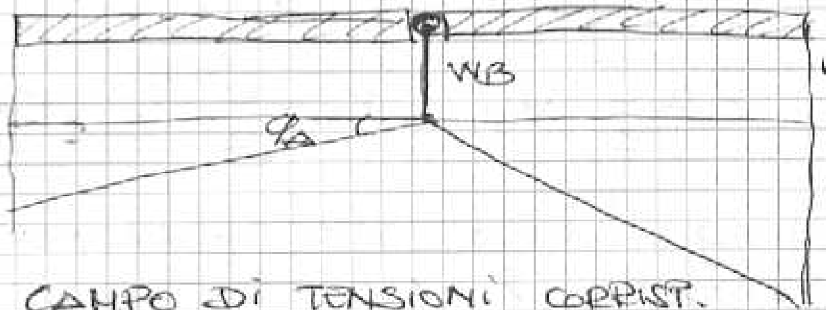
$EA_p/L_p = \bar{K} = K_0 B L = 90000$ N/mm



SVOLGIMENTO

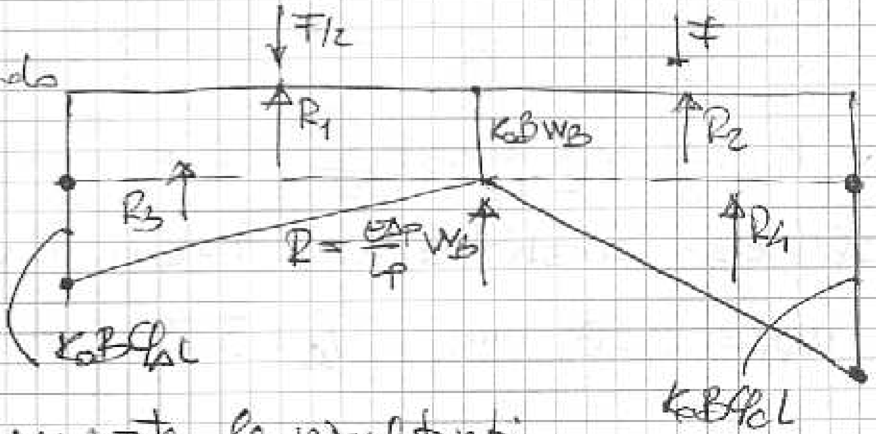
Una possibile parametrizzazione del campo di spostamenti per la trave in oggetto è rappresentata a lato e risulta funzione dei TRE PARAMETRI CINEMATICI seguenti

$w_B, \varphi_A, \varphi_C$



CAMPO DI TENSIONI CORRISP.

Il corrispondente campo di pressioni si ottiene moltiplicando il campo di spost. per K_0B ed ottenendo il sistema di forze riportato a lato.



nel quale sono evidenziate le risultanti parziali R_i della reazione del terreno:

$$R_1 = R_2 = K_0 B\, w_B \cdot L$$

$$R_3 = K_0 B \varphi_A \cdot L \frac{L}{2} \qquad R_4 = K_0 B \varphi_C \cdot L \frac{L}{2}$$

e la ~~risultante~~ reazione della molla

$$R = \frac{EA_p}{L_p} \cdot w_B$$

Le equazioni di equilibrio da imporre al sistema sono:

1) equilibrio alla traslazione in direzione verticale

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R - F/2 - F = 0$$

$$\left(2K_0BL + \frac{EA_p}{L_p}\right) w_B + K_0B\frac{L^2}{2}\varphi_A + K_0B\frac{L^2}{2}\varphi_C = \frac{3}{2}F$$

2) equilibrio alla rotazione del tratto AB rispetto a B

$$R_1 \cdot \frac{L}{2} + R_3 \cdot \frac{2L}{3} - \frac{F}{2}\cdot\frac{L}{2} = 0$$

$$K_0B\frac{L^2}{2}\cdot w_B + K_0B\frac{L^3}{3}\varphi_A = \frac{FL}{4}$$

3) equilibrio alla rotazione del tratto BC rispetto a B

$$R_2\frac{L}{2} + R_4\frac{2}{3}L - F\cdot\frac{L}{2} = 0$$

$$K_0B\frac{L^2}{2}w_B + K_0B\frac{L^3}{3}\varphi_C = \frac{FL}{2}$$

Sostituendo i valori numerici si ha

$w_B = 0.33$ mm, $\varphi_A = 5.556\cdot 10^{5}$; $\varphi_C = 1.667\cdot 10^{4}$

Diagramma delle reazioni sul terreno

Diagramma del Taglio